Zadania i problemy do wykładu *Statystyka* (ZESTAW NR 3)

ZADANIA

Zadanie 1. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową taką, że $\mu = EX_i$, $\sigma = VarX_i$ oraz $\rho = Cov(X_i, X_j)$ dla $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$. Pokazać, że jeśli $\rho \neq 0$, to statystyka

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

nie jest nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.

Zadanie 2. Z pewnej populacji o rozkładzie z wartością oczekiwaną μ oraz wariancją σ^2 wylosowano dwie próbki i dla każdej z nich obliczono średnią.

Próbka	Wielkość próbki	średnia
1	$n_1 = 10$	$\bar{x}_1$
2	$n_2 = 20$	$\bar{x}_2$

(i) Który z następujących dwóch estymatorów:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \quad \text{czy} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}\bar{X}_1 + \frac{2}{3}\bar{X}_2$$

przyjąć za ocenę wartości średniej μ?

(ii) Jak ocenić wariancję tych estymatorów?

(iii) Czy istnieje najlepszy nieobciążony estymator postaci $a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2$?

Zadanie 3. Dokonujemy jednej obserwacji dyskretnej zmiennej losowej X o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości $f(x|\theta)$, gdzie $\theta \in \{1, 2, 3\}$.

x	$f(x\|1)$	$f(x\|2)$	$f(x\|3)$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$

Znajdź estymator największej wiarogodności parametru θ.

Zadanie 4. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gęstości

$$f(x|\theta) = \theta x^{-2}, \qquad 0 < \theta \leqslant x < \infty.$$

(i) znajdź metodą momentów estymator parametru θ,

(ii) znajdź estymator największej wiarogodności parametru θ.

Zadanie 5*. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Wymień argumenty za i przeciw przyjęciu za wartości oczekiwanej μ następujących wielkości: średnia próbkowa $\bar{x}$, mediana próbkowa $\hat{\alpha}_{1/2}$ oraz $\frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\frac{1}{4}} + \hat{\alpha}_{\frac{3}{4}})$. Wykonaj odpowiednią symulację komputerową.

Zadanie 6. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gęstości

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \theta, \qquad \theta > 0.$$

(i) znajdź metodą momentów estymator parametru θ,

(ii) znajdź estymator największej wiarogodności parametru θ,

(iii) policz wartość oczekiwaną i wariancję obu estymatorów.

(iv) Który z nich powinien być zastosowany do estymacji parametru θ i dlaczego?

Zadanie 7. Niech X_1, X_2, X_3 będzie próbą losową rozmiaru 3 z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta, 2\theta)$ gdzie $\theta > 0$.

(i) Znajdź metoda momentów estymator parametru θ.

(ii) Znajdź estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ oraz taką stałą k dla której $E_\theta(k\hat{\theta}) = \theta$.

(iii) Jakie są wartości estymatora największej wiarogodności i estymatora wyznaczonego metoda momentów dla średnich wielkości winogron

$$1.29, 0.86, 1.33$$

Zadanie8*. Metoda *jackknife* jest ogólną technika redukcji obciążenia estymatora. Estymator jackknife jest zdefiniowany w następujący sposób. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową, a $T_n = T(X_1, ..., T_n)$ estymatorem parametru θ. Aby "ostrugać" T_n obliczamy n statystyk $T_n^{(i)}$, $i = 1, ..., n$, gdzie $T_n^{(i)}$ jest obliczane tak jak T_n jedynie z ta różnicą, że X_i jest usuwane z próby. Estymator jackknife parametru θ, oznaczany przez $JT(X_n)$, jest zdefiniowany jako

$$JT(X_n) = nT_n - \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_n^{(i)}.$$

Zwykle estymator jackknife ma mniejsze obciążenie niż T_n.
Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Bernoulliego z parametrem θ. Naszym celem jest estymacja θ^2.

(i) Pokaż, że estymator największej wiarogodności θ^2, $(\sum_{i=1}^{n} X_i/n)^2$, jest estymatorem obciążonym θ^2.

(ii) Zbuduj estymator jackknife oparty na estymatorze największej wiarogodności.

(iii) Pokaż, że estymator jackknife jest estymatorem nieobciążonym θ^2.

(iv) Pokaż, że estymator jackknife jest estymatorem nieobciążonym θ^2.

Krzysztof Topolski