Zadania i problemy do wykładu *Statystyka* (Zestaw nr 4)

Zadania

Zadanie 1. Rozpatrzmy następującą sytuację. Załóżmy, że mamy dwie symetryczne kostki do gry, D_1 z 5 czerwonymi ściankami i 1 białą ścianką oraz D_2 z 1 czerwoną ścianką i 5 białymi ściankami. Losujemy jedną z kostek i rzucamy nią aż do momentu wyrzucenia po raz pierwszy ścianki czerwonej. Tą samą kostką powtarzamy ten eksperyment jeszcze dwa razy. Załóżmy, że wyniki tych eksperymentów wyglądają w następujący sposób:

Pierwszy eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w trzecim rzucie
Drugi eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w piatym rzucie
Trzeci eksperyment:	czerwona ścianka pojawiła się po raz pierwszy w czwartym rzucie

Wykaż, że w przypadku kostki D_1 taki wynik może się zdarzyć z prawdopodobieństwem $5,7424 \times 10^{-8}$ natomiast w przypadku kostki D_2 z prawdopodobieństwem $8,9725 \times 10^{-4}$. Znając te prawdopodobieństw, jak sądzisz, która kostka została wylosowana do tego eksperymentu?

Zadanie 2. Rzucamy niesymetryczną monetą aż do momentu pojawienia się po raz pierwszy orła. Powtarzamy ten eksperyment z ta samą monetą trzy razy i otrzymujemy następujące wyniki:

Pierwszy eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w trzecim rzucie
Drugi eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w piątym rzucie
Trzeci eksperyment:	orzeł pojawia się po raz pierwszy w czwartym rzucie

Niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie tą monetą. Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru p?

Zadanie 3. Dokonujemy jednej obserwacji dyskretnej zmiennej losowej X o rozkładzie prawdopodobieństwa o gęstości $f(x|\theta)$, gdzie $\theta \in \{1, 2, 3\}$.

x	$f(x\|1)$	$f(x\|2)$	$f(x\|3)$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$

Znajdź estymator największej wiarogodności parametru θ.

Zadanie 4. Liczbę zgłoszeń w jednostce czasu do serwera można modelować przy pomocy rozkładu Poissona. Niech x_1, $x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby losowej z rozkładu Poissona z parametrem μ.

1. Pokaż, że funkcja wiarogodności $L(\mu)$ jest zadana przez

$$L(\mu) = \frac{e^{-n\mu}}{x_1! \cdots x_n!} \mu^{x_1+x_2+...+x_n}.$$

2. Policz logarytm funkcji wiarogodności oraz podaj postać estymatora największej wiarogodności parametru μ.

3. Jaką postać ma estymator największej wiarogodności prawdopodobieństwa zera w rozkładzie Poissona z parametrem μ.

Zadanie 5. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby losowej z rozkładu normalnego.

1. Dla rozkładu normalnego o gęstości

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}},$$

wyznacz estymator największej wiarogodności parametru μ.

2. Dla rozkładu normalnego o gęstości

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

wyznacz estymator największej wiarogodności parametru σ.

Zadanie 6. Początkujący łucznik strzela n razy do okrągłej tarczy o nieznanym promieniu τ. Trafia do tarczy za każdym razem, ale w zupełnie losowe miejsca. Niech $r_1, r_2, ..., r_n$ oznaczają odległości miejsc poszczególnych trafień od środka tarczy. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru τ

Zadanie 7. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gestości

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < \theta < \infty.$$

(i) Wyznacz metodą momentów estymator parametru θ,

(ii) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ, i pokaż, że jego wariancja dąży do zera gdy n dąży do nieskończoności.

Zadanie 8. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu o gestości

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \theta, \qquad \theta > 0.$$

(i) Wyznacz metodą momentów estymator parametru θ.

(ii) Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

(iii) Policz wartość oczekiwaną i wariancję obu estymatorów.

(iv) Który z nich powinien być zastosownay do estymacji parametru θ i dlaczego?

Zadanie 9. Z pewnej populacji o rozkładzie z wartością oczekiwaną μ oraz wariancją σ^2 wylosowano dwie próbki i dla każdej z nich obliczono średnią.

Próbka	**Wielkość próbki**	**Średnia**
1	$n_1 = 10$	$\bar{x}_1$
2	$n_2 = 20$	$\bar{x}_2$

(i) Który z następujących dwóch estymatorów:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \ \text{ czy } \ \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}\bar{X}_1 + \frac{2}{3}\bar{X}_2$$

przyjąć za ocenę wartości średniej μ?

(ii) Jak ocenić wariancję tych estymatorów?

(iii) Czy istnieje najlepszy nieobciążony estymator postaci $a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2$?

Zadanie 10. Niech X_1, X_2, X_3 będzie próbą losową rozmiaru 3 z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta, 2\theta)$ gdzie $\theta > 0$.

(i) Znajdź metoda momentów estymator parametru θ.

(ii) Znajdź estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ oraz taką stałą k dla której $E_\theta(k\hat{\theta}) = \theta$.

(iii) Jakie są wartości estymatora największej wiarogodności i estymatora wyznaczonego metoda momentów dla danych

$$1.29, 0.86, 1.33$$

Problemy

Problem 1. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Wymień argumenty za i prczciw przyjęciu za wartości oczekiwanej μ następujących wielkości: średnia próbkowa $\bar{x}$, mediana próbkowa $\hat{\alpha}_{1/2}$ oraz $\frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\frac{1}{4}} + \hat{\alpha}_{\frac{3}{4}})$. Wykonaj odpowiednią symulację komputerową.

Problem 2. Metoda *jackknife* jest ogólną technika redukcji obciażenia estymatora. Estymator jackknife jest zdefiniowany w następujacy sposób. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową, a $T_n = T(X_1, ..., T_n)$ estymatorem parametru θ. Aby "ostrugać" T_n obliczamy n statystyk $T_n^{(i)}$, $i = 1, ..., n$, gdzie $T_n^{(i)}$ jest obliczane tak jak T_n jedynie z ta różnicą, że X_i jest usuwane z próby. Estymator jackknife parametru θ, oznaczany przez $JT(X_n)$, jest zdefiniowany jako

$$JT(X_n) = nT_n - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_n^{(i)}.$$

Zwykle estymator jackknife ma mniejsze obciążenie niż T_n.
Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Bernoulliego z parametrem θ. Naszym celem jest estymacja θ^2.

(i) Pokaż, że estymator największej warogodności θ^2, $(\sum_{i=1}^{n} X_i/n)^2$, jest estymatorem obciążonym θ^2.

(ii) Zbuduj estymator jackknife oparty na estymatorze największej warogodności.

(iii) Pokaż, że estymator jackknife jest estymatorem nieobciążonym θ^2.

(iv) Pokaż, że estymator jackknife jest estymatorem nieobciążonym θ^2.

Problem 3. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową taką, że $\mu = EX_i$, $\sigma = VarX_i$ oraz $\rho = Cov(X_i, X_j)$ dla $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$. Pokazać, że jeśli $\rho \neq 0$, to statystyka

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

nie jest nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.

Krzysztof Topolski