

WSTĘP DO ANALIZY RZECZYWISTEJ I CAŁEK SINGULARNYCH

JACEK DZIUBAŃSKI

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Wrocław 2016.

¹Skrypt do wykładu prowadzonego w semestrze letnim roku akademickiego 2016/2017. Jedynie do użytku wewnętrznego.

1. TRANSFORMACJA FOURIERA W \mathbb{R}^n

1.1. Transformata Fouriera. Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy jej transformację Fouriera wzorem

$$(1.1) \quad \widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Mamy następujące proste do udowodnienia wzory:

$$(1.2) \quad (\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g},$$

$$(1.3) \quad \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} \quad \text{i } \widehat{f} \text{ jest funkcją ciągłą,}$$

$$(1.4) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0, \quad \text{Riemann-Lebesgue,}$$

$$(1.5) \quad (f * g)^\wedge = \widehat{f} \widehat{g}, \quad \text{gdzie } f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dy,$$

$$(1.6) \quad (\tau_h f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \cdot \xi}, \quad (f e^{2\pi i h \cdot x})^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi - h), \quad \text{gdzie } \tau_h f(x) = f(x+h),$$

$$(1.7) \quad [f(A \cdot)]^\wedge(\xi) = \widehat{f}(A\xi), \quad \text{dla odwzorowania ortogonalnego } A \in O(n),$$

$$(1.8) \quad \text{jeśli } g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x), \text{ to } \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi), \quad \lambda > 0,$$

$$(1.9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi),$$

przy założeniu, $f, \partial_j f \in L^1$

$$(1.10) \quad (-2\pi i x_j f)^\wedge(\xi) = \partial_j \widehat{f}(\xi).$$

przy założeniu, $f, x_j f \in L^1$.

1.2. Klasa Schwartza i dystrybucje temperowane. Klasę Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tworzą funkcje f klasy C^∞ na \mathbb{R}^n spełniające

$$(1.11) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = p_{\alpha, \beta}(f) < \infty.$$

Wielkości $p_{\alpha, \beta}$ nazywamy półnormami.

Zadanie 1.1. Klasa Schwartza jest przestrzenią Fréchet'a (metryzowaną i zupełną).

Ciąg funkcji f_m zbiega do f w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{\alpha, \beta}(f_m - f) \rightarrow 0$ dla wszystkich wielowskaźników $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Zadanie 1.2. Klasa Schwartza jest przestrzenią gęstą w $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 \leq p < \infty$.

Definicja. Dystrybucją temperowaną nazywamy każdy funkcjonal liniowy ciągły na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń liniową dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ciąg dystrybucji $T_n \in \mathcal{S}'$ zbiega do dystrybucji T w \mathcal{S}' , gdy $\langle T_n, f \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$ dla każdego $f \in \mathcal{S}$.

Zadanie 1.3. Jeśli $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, to $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

Wskazówka: Udowodnij, że dla $n = 1$ funkcje f i \widehat{f} spełniają to samo równanie różniczkowe zwyczajne

$$u' + 2\pi x u = 0, \quad u(0) = 1.$$

1.12. Twierdzenie. Transformata Fouriera odwzorowuje w sposób ciągły $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ wzajemnie jednoznacznie i "na". Ponadto

$$(1.13) \quad \int f \widehat{g} = \int \widehat{f} g$$

$$(1.14) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

D o w ó d . Mamy $\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) = C(D^\alpha x^\beta f)^\wedge(\xi)$. Zatem

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| \leq C \|(D^\alpha x^\beta f)\|_{L^1} \leq \sum_{|\alpha'|, |\beta'| < M} p_{\alpha', \beta'}(f),$$

co implikuje ciągłość. Wzór (1.13) wynika z twierdzenia Fubinięgo. Dalej

$$\int f(x) \widehat{g}(\lambda x) dx = \int \widehat{f}(x) \lambda^{-n} g(\lambda^{-1} x) dx.$$

czyli

$$\int f(x) \lambda^n \widehat{g}(\lambda x) dx = \int \widehat{f}(x) g(\lambda^{-1} x) dx.$$

Podstawiając $g(x) = \exp^{-\pi|x|^2}$ i przechodząc z $\lambda \rightarrow \infty$ mamy

$$f(0) \int e^{-\pi|x|^2} dx = \int \widehat{f}(x) dx \quad \text{czyli} \quad f(0) = \int \widehat{f}.$$

Stosując (1.6) dostajemy

$$f(x) = (\tau_x f)(0) = \int (\tau_x f)^\wedge(\xi) d\xi = \int \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

□

Kładąc $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ mamy $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \widetilde{f}$. Co implikuje $\mathcal{F}^4 f = f$.

Definicja. Transformata Fouriera dystrybucji temperowanej $T \in \mathcal{S}'$ nazywamy dystrybucje temperowaną \widehat{T} zadaną wzorem

$$\langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle.$$

Podobnie definiujemy

$$\langle \widetilde{T}, f \rangle = \langle T, \widetilde{f} \rangle.$$

Zadanie 1.4. Transformata Fouriera jest odwzorowaniem ciągłą bijekcją \mathcal{S}' na \mathcal{S}' . Ponadto $((\widehat{T})^\wedge)^\wedge = T$.

Ponieważ każda funkcja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, jest dystrybucją temperowaną,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int fg,$$

transformata Fouriera takiej funkcji ma sens dystrybucyjny. W przypadku funkcji $f \in L^1$ definiując $\langle T, \varphi \rangle = \int f\varphi$ mamy

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \int f\widehat{\varphi} = \int \widehat{f}\varphi$$

tak więc dystrybucyjna transformata Fouriera funkcji z L^1 pokrywa się z klasyczną.

Dalej każda funkcja $f \in L^p$ jest lokalnie w L^1 oraz $f_R = f\chi_{B(0,R)} \rightarrow f$ w \mathcal{S}' gdy $R \rightarrow \infty$. Zatem

$$\widehat{f} = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_R)$$

1.3. Transformacja Fouriera na L^p , $1 \leq p \leq 2$.

1.15. **Twierdzenie.** Transformacja Fouriera \mathcal{F} jest izometrią z L^2 na L^2 . Ponadto,

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad \text{zbieżność w } L^2$$

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \text{zbieżność w } L^2.$$

D o w ó d . Dla $f, h \in \mathcal{S}$ niech $\bar{g} = \widehat{h}$, czyli $\widehat{g} = \bar{h}$. Mamy

$$\int f\bar{h} = \int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g = \int \widehat{\widehat{f}}\bar{h}$$

co daje że \mathcal{F} jest izometrią na $L^2 \cap \mathcal{S}$. Dalej jest także L^2 -izometrią na $L^1 \cap L^2$. Wylczenie dystrybucyjnej transformaty Fouriera \widehat{f} dla $f \in L^2$ można teraz zrobić poprzez gęstość. Istotnie $f_R = f\chi_{B(0,R)} \rightarrow f$ w L^2 , więc także zbieżność w \mathcal{S}' . Zatem $\widehat{f}_R \rightarrow \widehat{f}$ w \mathcal{S}' . Ponadto z izometrii \widehat{f}_R tworzą ciąg Cauchy'ego w L^2 zbieżny do funkcji $F \in L^2$. Oczywiście \widehat{f} (w sensie dystrybucyjnym) = F i $\|F\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. \square

Jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, to $f = f_1 + f_2$, gdzie $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^2$ (np. $f_1 = f\chi_{\{|x| \leq 1\}}$). Wówczas $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$. Czy możemy powiedzieć coś więcej o \widehat{f} ?

1.16. **Twierdzenie** (interpolacyjne Riesz-Thorina). Niech $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Dla $0 < \theta < 1$ niech

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Jeśli T jest operatorem liniowym z $L^{p_0} + L^{p_1}$ do $L^{q_0} + L^{q_1}$ takim, że

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{dla } f \in L^{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1\|f\|_{p_1} \quad \text{dla } f \in L^{p_1},$$

to

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \quad \text{dla } f \in L^p.$$

1.17. **Wniosek** (Nierówność Hausdorffa-Younga). *Jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, to*

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p},$$

gdzie $p + p' = pp'$.

D o w ó d . Mamy $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$, $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Zatem wymagana nierówność wynika z twierdzenia interpolacyjnego Riesz-Thorina. \square

1.18. **Wniosek** (Nierówność Younga). *Jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, to $f * g \in L^r$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ i*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

D o w ó d . Zauważmy, że $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$ i $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$ i stosujemy twierdzenie interpolacyjne dla operatora $Tg = f * g$. \square

Zadanie 1.5. Niech $g(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Udowodnij, że

$$\widehat{g}(x) = \Gamma((n+1)/2) \pi^{-(n+1)/2} (1 + |x|^2)^{-(n+1)/2} =: P_t(x).$$

Funkcja $P_t(x)$ nazywa się jądrem Poissona.

W szczególności dla $n = 1$:

$$P_t(x)(e^{-t|\xi|})^\wedge(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}.$$

2. FUNKCJA MAKSYMALNA HARDY'EGO LITTLEWOODA

2.1. Jedność aproksymatywna. Niech $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ będzie taka że $\int \varphi = 1$. Oznaczmy

$$\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(t^{-1}x).$$

Wówczas $\varphi \rightarrow \delta_0$ w \mathcal{S}' , przy $t \rightarrow 0$. Istotnie, niech $f \in \mathcal{S}$

$$\int \varphi(x)f(x) dx = \int \varphi(x)f(tx) dx \rightarrow f(0).$$

Tak określoną rodzinę funkcji nazywamy jednością aproksymatywną.

2.1. Twierdzenie. Niech φ_t będzie jednością aproksymatywną. Wówczas

$$\|\lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi - f\|_{L^p} = 0$$

dla $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Jeśli f jest jednostajnie ciągła i ograniczona, to zbieżność jest także w normie L^∞ .

Dowód.

$$f * \varphi_t(x) - f(x) = \int [f(x - ty) - f(x)]\varphi(y) dy.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie takie, że $\|f(x - h) - f(x)\|_{L^p(dx)} \leq \varepsilon(2\|\varphi\|_{L^1})^{-1}$ dla $|h| < \delta$. Jeśli t jest dostatecznie małe mamy

$$\int_{|y| > \delta/t} |\varphi(y)| dy < \varepsilon(4\|f\|_{L^p})^{-1}.$$

Stosując nierówność Minkowskiego mamy

$$\|f * \varphi_t - f\|_{L^p} \leq \int_{|y| \leq \delta/t} |\varphi(y)| \|\tau_{ty}f - f\|_{L^p} + 2\|f\|_{L^p} \int_{|y| > \delta/t} |\varphi(y)| dy < \varepsilon.$$

Dowód w przypadku funkcji L^∞ i funkcji f jednostajnie ciągłej i ograniczonej jest ćwiczeniem. \square

2.2. Słaby typ i zbieżność punktowa. Niech (X, μ) i (Y, ν) będą przestrzeniami z miarą. Niech T będzie operatorem podliniowym z $L^p(X)$ w przestrzeń funkcji mierzalnych na Y , to znaczy,

$$|T(\alpha f)(y)| = |\alpha| |Tf(y)|, \quad |T(f + g)(y)| \leq |Tf(y)| + |Tg(y)|.$$

Definicja. Mówimy, że T jest słabego typu (p, q) , $1 \leq q < \infty$, gdy dla pewnego $C \geq 0$ mamy

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p(X)}}{\lambda}\right)^q \quad \text{dla } \lambda > 0.$$

Mówimy, że T jest mocnego typu (p, q) , gdy T jest ograniczony z $L^p(X)$ do $L^q(Y)$. Mówimy, że T jest słabego typu (p, ∞) , gdy T jest ograniczony z $L^p(X)$ do $L^\infty(Y)$ czyli mocnego typu.

2.2. Lemat. *Każdy operator mocnego typu (p, q) jest słabego typu (p, q) .*

D o w ó d . Niech $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$. Wówczas

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(y)}{\lambda} \right|^q d\nu(y) \leq \frac{1}{\lambda^q} \|Tf\|_{L^p}^q \leq \left(\frac{\|T\|_{p \rightarrow q} \|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q.$$

□

2.3. Twierdzenie. *Niech T_t będzie rodziną operatorów liniowych na $L^p(X, \mu)$ o wartościach w funkcjach mierzalnych (X, μ) taką, że operator maksymalny T^* związany z tą rodziną*

$$T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|.$$

jest słabego typu (p, q) . Wówczas

$$J = \{f \in L^p(X) : \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f(x) = f(x) \text{ prawie wszędzie}\}$$

jest domknięty w $L^p(X)$.

D o w ó d . Niech $f_n \in J$, $f_n \rightarrow f$ w L^p . Dla $\lambda > 0$ mamy

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in X : \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}) \\ & \leq \mu(\{x \in X : \limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda\}) \\ (2.4) \quad & \leq \mu(\{x \in X : T^*(f - f_n)(x) > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X : |(f - f_n)(x)| > \lambda/2\}) \\ & \leq \left(\frac{2C \|f - f_n\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q + \left(2 \frac{\|f - f_n\|}{\lambda} \right)^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Zatem zbiór punktów dla których $T_n f(x)$ nie zbiega do $f(x)$ jest miary zero. □

2.3. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza. Niech (X, μ) będzie przestrzenią z miarą, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ funkcja mierzalna. Niech $a_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ będzie zadana wzorem

$$a_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Zadanie 2.1. Niech $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\varphi(0) = 0$. Wówczas

$$\int_X \varphi(|f(x)|) d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(\lambda) a_f(\lambda) d\lambda.$$

Wskazówka: rozważ całkę

$$\int_X \int_0^{|f(x)|} \varphi'(\lambda) d\lambda d\mu(x)$$

i zamień kolejność całkowania.

Stosując zadanie do $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ mamy

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda) d\lambda.$$

2.5. Twierdzenie (interpolacyjne Marcinkiewicza). *Niech (X, μ) , (Y, ν) będą przestrzeniami mierzalnymi, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, T operatorem podliniowym zdefiniowanym z $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ do przestrzeni funkcji mierzalnych na Y , który jest słabego typu (p_0, p_0) i (p_1, p_1) . Wówczas T jest mocnego typu (p, p) dla $p_0 < p < p_1$.*

Dowód. Dla $f \in L^p$ i $\lambda > 0$ rozkładamy $f = f_0 + f_1$, $f_0 = f\chi_{\{x \in X: |f(x)| > c\lambda\}}$, $f_1 = f\chi_{\{x \in X: |f(x)| \leq c\lambda\}}$. Wówczas $f_0 \in L^{p_0}$, $f_1 \in L^{p_1}$. Ponadto, $|Tf(y)| \leq |Tf_1(y)| + |Tf_0(y)|$, co daje

$$a_{Tf}(\lambda) \leq a_{Tf_0}(\lambda/2) + a_{Tf_1}(\lambda/2).$$

Przypadek 1; $p_1 = \infty$. Wówczas biorąc $c = (2A_1)^{-1}$, gdzie $A_1 = \|T\|_{\infty \rightarrow \infty}$ mamy $a_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$. Ze słabego typu (p_0, p_0) dostajemy

$$a_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_0}{\lambda} \|f_0\|_{p_0} \right)^{p_0}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x \in X: |f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\lambda \\ (2.6) \quad &= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda d\mu(x) \\ &= \frac{p}{p-p_0} (2A_0)^{p_0} (2A_1)^{p-p_0} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Przypadek 2; $p_1 < \infty$. Wówczas

$$a_{Tf_i}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_i}{\lambda} \|f_i\|_{p_i} \right)^{p_i}, \quad i = 0, 1.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{\{x: |f(x)| > c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\lambda \\ (2.7) \quad &+ p \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1} (2A_1)^{p_1} \int_{\{x: |f(x)| \leq c\lambda\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) d\lambda \\ &= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0} \frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p} \frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

2.4. Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewooda. Niech B_r oznacza kulę o środku w 0 i promieniu r , $|B_r|$ jej objętość.

Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewooda funkcji lokalnie całkownej f na \mathbb{R}^n jest zdefiniowana wzorem

$$(2.8) \quad Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(x-y)| dy = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

Funkcja może przyjmować wartości $+\infty$.

Można także zdefiniować funkcję maksymalną Hardy'ego-Littlewooda względem kostek. Niech $Q_r = [-r, r]^n$ oznacza kostkę w \mathbb{R}^n o środku w 0 i długości boku $2r$, jej objętość $|Q_r| = (2r)^n$.

$$(2.9) \quad M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)| dy.$$

Zadanie 2.2. istnieją stałe $c_n, C_n > 0$ takie, że

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x).$$

Oczywiście

$$(2.10) \quad \|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|M'f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

2.11. Twierdzenie. *Funkcja M jest słabego typu $(1, 1)$ i mocnego typu (p, p) dla $1 < p \leq \infty$.*

Wystarczy udowodnić słaby typ $(1, 1)$ i zastosować (2.10) wraz z twierdzeniem interpolacyjnym Marcinkiewicza.

Udowodnimy najpierw twierdzenie dla $n = 1$. Dowód dla $n > 1$ jest analogiczny.

Zadanie 2.3. Lemat pokryciowy *Niech $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ będzie rodziną odcinków, K zbiorem zwartym zawartym w $\bigcup_\alpha I_\alpha$. Wówczas istnieje podrodzina przeliczalna (skończona) $\{I_j\}$ taka, że*

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \sum_j \chi_{I_j}(x) \leq 2 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wskazówka: Jeśli trzy odcinki domknięte mają punkt wspólny, to jeden z nich zawiera się w sumie dwu pozostałych.

D o w ó d . [słabego typu] Niech $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Jeśli $x \in E_\lambda$, to istnieje odcinek I_x o środku w x , że

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda.$$

Niech K zwarty zawarty w E_λ . Wówczas $K \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} I_x$. Z lematu pokryciowego istnieje przeliczalna (skończona) podrodzina odcinków I_j , że

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \sum_j \chi_{I_j}(x) \leq 2.$$

Zatem

$$|K| \leq \sum_j |I_j| \leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j \chi_{I_j} |f| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1.$$

Ponieważ $|E_\lambda| = \sup\{|K| : K \subset E_\lambda, K \text{ zwarty}\}$ dowód jest zakończony. \square

Zadanie 2.4. Zmodyfikować powyższy dowód na przypadek n -wymiarowy poprzez udowodnienie następującego lematu.

2.12. **Lemat.** Niech B_α , $\alpha \in \Lambda$ będzie rodziną kul w \mathbb{R}^n pokrywających zbiór zwarty K . Istnieje przeliczalna (skończona) podrodzina rozłącznych kul B_j taka, że

$$|K| \leq 5^n \sum_j |B_j|.$$

Dla funkcji φ określonej na \mathbb{R}^n określmy $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$.

2.13. **Twierdzenie.** Niech φ będzie funkcją na \mathbb{R}^n całkowalą, nieujemną, radialną, malejącą na $(0, \infty)$. Wówczas

$$\sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| \leq \|\varphi\|_{L^1} Mf(x).$$

D o w ó d . Załóżmy na początek, że

$$(2.14) \quad \varphi(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{r_j}}(x), \quad a_j > 0.$$

Wówczas

$$|f * \varphi(x)| \leq \sum_j a_j |B_{r_j}| \frac{1}{|B_{r_j}|} |f| * \chi_{B_{r_j}} \leq \sum_j a_j |B_{r_j}| Mf(x) = \|\varphi\|_{L^1} Mf(x).$$

Następnie jeśli φ jest funkcją spełniającą założenia twierdzenia, to można ją aproksymować od góry w L^1 funkcjami postaci (2.14). (To jest **Zadanie 2.5**). \square

2.15. **Wniosek.** Jeśli $|\varphi(x)| \leq \psi(x)$, gdzie ψ jest funkcją całkowalną nieujemną, radialną, malejącą, to funkcja maksymalna

$$\sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)|$$

jest ograniczona na L^p dla $1 < p \leq \infty$ i słabego typu $(1,1)$.

2.16. **Wniosek.** Jeśli φ spełnia założenia powyższego wniosku, to

$$\lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi_t(x) = \left(\int \varphi \right) f(x)$$

prawie wszędzie dla $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$.

D o w ó d . Założyć, że $\int \varphi = 1$ i zastosować twierdzenie 2.3. Następnie pozbyć się założenia, że $\int \varphi = 1$. \square

2.5. Diadyczna funkcja maksymalna. Niech \mathcal{Q}_0 będzie rodziną kostek w \mathbb{R}^n postaci $\mathbf{a} + [0, 1)^n$, gdzie $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ (kostki jednostkowe o bokach równoległych do osi zaczepione "lewym dolnym wierzchołkiem" w punktach całkowitych). Tworzą one rozłączne pokrycie \mathbb{R}^n . Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech \mathcal{Q}_k oznacza rodzinę kostek powstałą poprzez przemnożenie \mathcal{Q}_0 przez 2^{-k} (są to kostki o bokach o długości 2^{-k} równoległych do osi o lewym dolnym wierzchołku w punktach $2^{-k}\mathbb{Z}^n$). Oczywiście każdy wierzchołek z kostki z tej rodziny jest ze zbioru $2^{-k}\mathbb{Z}^n$. Kostki z rodzin \mathcal{Q}_k nazywamy diadycznymi. Mamy następujące własności:

- (i) dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ każdy $x \in \mathbb{R}^n$ jest w dokładnie jednej kostce z rodziny \mathcal{Q}_k ;
- (ii) dwie kostki diadyczne są albo rozłączne, albo jedna zawarta jest w drugiej;
- (iii) dla $j < k$, każda kostka diadyczna z rodziny \mathcal{Q}_k jest zawarta w dokładnie jednej kostce diadycznej z rodziny \mathcal{Q}_j ;
- (iv) każda kostka diadyczna z rodziny \mathcal{Q}_k dzieli się na 2^n kostek diadycznych z rodziny \mathcal{Q}_{k+1} .

Dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q(x).$$

Jest ona stała na $Q \in \mathcal{Q}_k$.

Zadanie 2.3. Mamy następującą własność: Dla Ω będącej sumą pewnych kostek z rodziny \mathcal{Q}_k zachodzi

$$\int_{\Omega} E_k f = \int_{\Omega} f.$$

Definiujemy diadyczną funkcję maksymalną M_d wzorem

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

2.17. Twierdzenie. M_d jest słabego typu (1,1). Ponadto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k f(x) = f(x).$$

Dowód. Niech $f \in L^1$. Możemy przyjąć, że $f \geq 0$. Wówczas

$$\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k, \quad \text{suma rozłączna}$$

$$\Omega_k = \{x : E_k f(x) > \lambda \text{ i } E_j f(x) \leq \lambda \text{ dla } j < k\}.$$

Ponieważ E_k jest stała na kostkach z \mathcal{Q}_k , Ω jest sumą pewnych kostek z tej rodziny i $|\Omega_k| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f$. Zatem

$$\begin{aligned} |\{x : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} |E_k f| \\ (2.18) \qquad \qquad \qquad &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Druga część twierdzenia wynika z pierwszej i faktu, że $E_k f(x) \rightarrow f(x)$ dla $f \in \mathcal{S}$.

□

Powyższy dowód nasuwa następujące twierdzenie (jest to rozkład tak zwany rozkład Calderóna-Zygmunda)

2.19. Twierdzenie. *Niech f będzie nieujemną funkcją całkowalną. Wówczas dla każdej liczby $\lambda > 0$ istnieje rodzina Q_j kostek diadycznych, że*

$$(i) \quad f(x) \leq \lambda \quad \text{dla prawie wszystkich } x \notin \bigcup_j Q_j;$$

$$(ii) \quad \left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1;$$

$$(iii) \quad \lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda.$$

Dowód. Dla $\lambda > 0$ mamy $\mathbf{E}_\lambda = \{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup \Omega_k$, suma rozłączna (patrz dowód poprzedniego twierdzenia). Każdy Ω_k jest sumą kostek z \mathcal{Q}_k . Zatem $\mathbf{E}_\lambda = \bigcup_j Q_j$, rozłączna suma kostek diadycznych. Jeśli $x \notin \mathbf{E}_\lambda$, to $E_j f(x) \leq \lambda$ dla każdego j . Zatem $f(x) \leq \lambda$ prawie wszędzie dla $x \notin \mathbf{E}_\lambda$. Punkt (ii) wynika z dowodu poprzedniego twierdzenia. Punkt (iii) też. Istotnie, jeśli Q_j jest jedną z kostek, to Q_j wchodzi w skład dokładnie jednego Ω_k . Ale wtedy dla $x \in Q_j$ $E_k f(x) > \lambda$ i $E_{k-1} f(x) \leq \lambda$. Niech \tilde{Q}_j oznacza kostkę z \mathcal{Q}_{k-1} taką, że $Q_j \subset \tilde{Q}_j$. Mamy

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|} \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} f \leq 2^n \lambda.$$

□

2.6. Dowód słabego typu (1,1) operatora maksymalnego M' z użyciem funkcji maksymalnej diadycznej.

2.20. Lemat. *Dla $\lambda > 0$ i funkcji nieujemnej całkowalnej f mamy*

$$|\{x : M' f(x) > 4^n \lambda\}| \leq 2^n |\{x : M_d f(x) > \lambda\}|.$$

Dowód. Dla $\lambda > 0$ niech Q_j będzie rodziną rozłącznych kostek diadycznych jak w powyższym twierdzeniu. Wtedy $\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup Q_j$. Niech $2Q_j$ oznacza kostkę o tym samym środku i dwa razy większym boku. Let będzie udowodniony, jeśli pokażemy, że

$$\{x : M' f(x) > 4^n \lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

Niech $x \notin \bigcup_j 2Q_j$. I niech Q będzie dowolną kostką o środku w x . Oznaczmy przez l długość boku Q . Niech $k \in \mathbb{Z}$ będzie takie, że $2^{-(k+1)} \leq l < 2^{-k}$. Wówczas istnieje co najwyżej 2^n kostek z rodziny \mathcal{Q}_k mającej punkt wspólny z Q . Oznaczmy je przez R_1, R_2, \dots, R_m , $m \leq 2^n$. Pokrywają one oczywiście Q . Zauważmy, kostka Q_j nie może zawierać żadnej kostki R_i . Zatem, dla dowolnych dwu kostek R_i i Q_j są one albo rozłączne, albo $Q_j \subset R_i$. W obu przypadkach $\frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} f \leq \lambda$. Mamy więc

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{-kn}}{|Q|} \frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} f \leq 2^n m \lambda \leq 4^n \lambda.$$

□

D o w ó d . [słabego typu dla M'] Wystarczy pokazać dla $f \geq 0$. Z lematu

$$|\{x : M'f(x) > \lambda\}| \leq 2^n |\{x : M_d f(x) > 4^{-n}\lambda\}| \leq \frac{8^n}{\lambda} \|f\|_1.$$

□

Jako wnioski mamy wynikające z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza i twierdzenia o domkniętości.

2.21. **Wniosek.** *Funkcje maksymalna M' i M i M_d są słabych typów $(1,1)$ i mocnych typów (∞, ∞) , a zatem mocnych typów (p,p) , $1 < p \leq \infty$.*

2.22. **Wniosek** (Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowalności). *Jeśli $f \in L^p_{loc}$, to*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y) dy = f(x) \quad \text{prawie wszędzie.}$$

2.7. Szacowania wagowe.

2.23. **Twierdzenie.** *Niech w będzie nieujemną funkcją mierzalną na \mathbb{R}^n , $1 < p < \infty$. Wówczas istnieje stała C_p , że*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x) dx.$$

Ponadto,

$$\int_{\{x: Mf(x) > \lambda\}} w(x) dx \leq C_1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x) dx.$$

D o w ó d . Pokażemy, że $\|Mf\|_{L^\infty(w(x)dx)} \leq \|f\|_{L^\infty(Mw(x)dx)}$. Jeśli jeszcze pokażemy drugą część twierdzenia, to pierwsza będzie wynikać z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza

Jeśli $Mw(x) = 0$ dla pewnego x , to $w(x) = 0$ prawie wszędzie i nie ma czego dowodzić. Zatem założymy, że $Mw(x) > 0$ dla każdego x . Niech $f \in L^\infty(Mw)$ i niech $a > \|f\|_{L^\infty(Mw)}$. Wówczas

$$\int_{\{x: |f(x)| > a\}} Mw(x) dx = 0,$$

zatem, $|f(x)| \leq a$ prawie wszędzie. Stąd $Mf(x) \leq a$, więc $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq a$, co daje $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(Mw)}$

Przejdźmy do dowodu słabego typu. Wystarczy udowodnić dla $f \geq 0$. Załóżmy na początek, że dodatkowo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Niech $\{Q_j\}_j$ będzie rozkładem Calderóna-Zygmunda na poziome λ . Zatem

$$\{x : M'f(x) > 4^n \lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 \int_{\{x: M'f(x) > 4^n \lambda\}} w(x) dx &\leq \sum_j \int_{2Q_j} w(x) dx \\
 &= \sum_j 2^n |Q_j| \frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w(x) dx \\
 (2.24) \quad &\leq \frac{2^n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(y) \left(\frac{1}{|2Q_j|} \int_{2Q_j} w(x) dx \right) dy \\
 &\leq \frac{C2^n}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f(y) M'w(y) dy \\
 &\leq \frac{C2^n}{\lambda} \int f(y) C' M w(y) dy
 \end{aligned}$$

Jeśli $f \notin L^1$, to istnieje ciąg $f_n \in L^1$ $f_n \geq 0$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ prawie wszędzie i monotonicznie rosnąco. **Dlaczego taki ciąg istnieje, to jest kolejne**

Zadanie 2.4. Wówczas $Mf_n(x) \rightarrow Mf(x)$ monotonicznie dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Mamy więc $\{x : Mf(x) > \lambda\} = \bigcup \{x : Mf_n(x) > \lambda\}$ i zbiory w tej sumie tworzą ciąg monotoniczny na zawieranie. Dalej $\int f M w = \lim_n \int f_n M w$. Stąd twierdzenie wynika z poprzednio udowodnionej nierówności i przejść granicznych. \square

Zadanie 2.5. Udowodnij, że jeśli $f \in L^1$, $f \neq 0$, to $Mf \notin L^1$.

3. TRANSFORMATA HILBERTA.

3.1. Sprężone jądro Poissona. Przypomnijmy, że jądro Poissona na prostej zadane jest wzorem

$$P_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|})(x).$$

Wówczas dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (choć wzór ma sens dla szerszej klasy funkcji f) mamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f * P_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= u(z), \quad z = x + it, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(f * P_t)(x) &= \int (-2\pi|\xi|)^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi, \\ \frac{d^2}{dx^2}(f * P_t)(x) &= \int (2\pi i|\xi|)^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi, \end{aligned}$$

co daje, że u jest funkcją harmoniczną na $\mathbb{R}_+^2 = \{z : \Im z > 0\}$. Zauważmy, że funkcję $u(z)$ możemy zapisać jako

$$u(z) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi.$$

Zdefiniujmy

$$iv(z) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi - \int_{-\infty}^0 \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi.$$

Zadanie 3.1. Wykaż, że v jest harmoniczną na \mathbb{R}_+^2 . Ponadto obie funkcje u i v są rzeczywiste jeśli f jest rzeczywistą.

Widzimy, że $u + iv$ jest funkcją holomorficzną, zatem v jest funkcją sprzężoną do u .

Zauważmy, że

$$v(z) = \int_{-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Powyższy wzór może być zapisany jako

$$v(x, t) = f * Q_t, \quad \widehat{Q}_t(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|}.$$

Jądro $Q_t(x)$ nosi nazwę jądra sprzężonego do P_t .

Zadanie 3.2. Wykazać, że

$$Q_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{t^2 + x^2}.$$

Zadanie 3.3. Wykazać, poprzez wyliczenie, że $P_t(x)$ i $Q_t(x)$ są funkcjami harmonicznymi na górnej półpłaszczyźnie.

Ponadto widzimy, że

$$P_t(x) + iQ_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t + ix}{t^2 + x^2} = \frac{i}{\pi z}$$

jest funkcją holomorficzną.

Wiemy, że P_t jest jednością aproksymatywną przy $t \rightarrow 0$. Zauważmy, że Q_t nie jest, bo funkcje $Q_t(x)$ jako funkcje zmiennej x nie są całkowlalne.

Formalnie

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q_t(x) = \frac{1}{\pi x}$$

co nie jest lokalnie całkowlaną funkcją.

Z drugiej strony rozważmy granicę jąder Q_t w sensie dystrybucyjnym, gdy $t \rightarrow 0$, to znaczy,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle Q_t, f \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \int Q_t(x) f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \widehat{Q}_t, \mathcal{F}^{-1} f \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \int -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t |\xi|} \widehat{f}(-\xi) d\xi \\ &= i \int \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia całka jest dobrze zdefiniowaną dystrybucją temperowaną. Ponadto mamy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \widehat{Q}_t = -i \operatorname{sgn}(\xi)$$

w sensie dystrybucyjnym.

3.2. Część główna (principal value) $1/x$. Definiujemy dystrybucję temperowaną zwaną częścią główną $1/x$ wzorem

$$\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Jest to dobrze zdefiniowana dystrybucja temperowana, bo

$$\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, f \rangle = \int_{|x| < 1} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + \int_{|x| > 1} \frac{f(x)}{x} dx$$

i obie całki są zbieżne.

3.2. Twierdzenie. $Q_t \rightarrow \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \frac{1}{x}$ w \mathcal{S}' przy $t \rightarrow 0$.

D o w ó d . Zdefiniujmy $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \chi_{\{|x| > \varepsilon\}}$. Jest to funkcja ograniczona, więc definiuje dystrybucję temperowaną. Ponadto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon = \text{p.v.} \frac{1}{x}$ w \mathcal{S}' . Wystarczy udowodnić, że

$$\lim_{t \rightarrow 0} (Q_t - \frac{1}{\pi} \psi_t) = 0$$

w \mathcal{S}' . Ustalmy $f \in \mathcal{S}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
 \langle \pi Q_t - \psi_t, f \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{xf(x)}{t^2 + x^2} dx - \int_{|x|>t} \frac{f(x)}{x} dx \\
 (3.3) \quad &= \int_{|x|<t} \frac{xf(x)}{t^2 + x^2} dx + \int_{|x|>t} \left(\frac{x}{t^2 + x^2} - \frac{1}{x} \right) f(x) dx \\
 &= \int_{|x|<1} \frac{xf(tx)}{1 + x^2} dx - \int_{|x|>1} \frac{f(tx)}{x(1 + x^2)} dx.
 \end{aligned}$$

Jeśli weźmiemy granice przy $t \rightarrow 0$, to widzimy, że z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej obie całki dążą to całek z funkcji całkownych nieparzystych po obszarach symetrycznych, a więc do 0. \square

3.4. Wniosek.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f * Q_t(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy,$$

Z ciągłości transformacji Fouriera w \mathcal{S}' mamy

3.5. Wniosek.

$$\left(\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \frac{1}{x} \right)^\wedge(\xi) = -i \text{sgn}(\xi)$$

3.3. Transformata Hilberta. Dla funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiujemy jej transformatę Hilberta $Hf(x)$ jednym z równoważnych wzorów

$$\begin{aligned}
 Hf &= \lim_{t \rightarrow 0} f * Q_t, \\
 Hf &= \frac{1}{\pi} f * \left(\text{p.v.} \frac{1}{x} \right), \\
 (Hf)^\wedge(\xi) &= -i \text{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).
 \end{aligned}$$

Z trzeciego równania wynika:

$$\begin{aligned}
 \|Hf\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}, \\
 H(Hf) &= -f, \\
 \int (Hf)g &= - \int f(Hg).
 \end{aligned}$$

Pozwala to zdefiniować transformatę Hilberta dla funkcji $f \in L^2$.

Zauważmy, że dla $f \in L^2$ mamy

$$Hf(x) \int \frac{1}{\pi} \frac{f(y)}{x-y} dy \quad \text{dla } x \notin \text{supp } f.$$

3.6. Twierdzenie. *Istnieją stałe C_p , $1 \leq p < \infty$, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mamy*

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq C_1 \lambda^{-1} \|f\|_{L^1} \quad \text{czyli słaby typ } (1,1), \text{ (Czebyszew),}$$

$$\|Hf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty, \quad \text{mocny typ } (p,p) \text{ (Riesz).}$$

Dowód. Udowodnimy słaby typ (1,1). Niech $f \in \mathcal{S}$. Dokonajmy rozkładu C-Z funkcji $|f|$ na poziomie $\lambda > 0$, to jest, istnieje ciąg rozłącznych odcinków I_j , że

$$|f(x)| \leq \lambda \quad \text{dla } x \notin \Omega = \bigcup_j I_j,$$

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1},$$

$$\lambda < \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| \leq 2\lambda.$$

Mając takie odcinki rozkładamy funkcję f na sumę funkcji g i b , gdzie

$$(3.7) \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \notin \Omega, \\ \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f & \text{dla } x \in I_j \end{cases}$$

$$b(x) = \sum_j b_j(x),$$

gdzie

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f \right) \chi_{I_j}(x).$$

Mamy $|g(x)| \leq 2\lambda$, b_j ma nośnik w I_j i całkę zero. Ponadto $f, g \in L^2$. Zatem $Hf = Hg + Hb$ i w konsekwencji

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |Hg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : |Hb(x)| > \lambda/2\}|.$$

Stosując izometrię H na L^2 mamy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} |\{x : |Hg(x)| > \lambda/2\}| &\leq 4\lambda^{-2} \int |g(x)|^2 dx \\ &\leq 8\lambda^{-1} \int |g(x)| dx \\ &\leq 8\lambda^{-1} \int |f(x)| dx \end{aligned}$$

Niech $\Omega^* = \bigcup_j 2I_j$. Mamy $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$ i

$$(3.9) \quad \begin{aligned} |\{x : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq 2\lambda^{-1} \|f\|_{L^1} + 2\lambda^{-1} \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb(x)| dx. \end{aligned}$$

zauważmy, że jeśli $x \notin \Omega^*$, to $x \notin \text{supp } b \subset \Omega$. Zatem dla $x \notin \Omega^*$ mamy

$$Hb(x) = \sum_j Hb_j(x) = \sum_j \int \frac{b_j(y)}{x-y} dy.$$

Oznaczmy przez: c_j środek I_j , $2r_i = |I_i|$. Wówczas dla $x \notin 2I_j$, $y \in I_j$ mamy $2r_i < |x - c_j| \leq |x - y| + |y - c_j| \leq |x - y| + r_i$. Stąd $r_i < |x - y|$ i w konsekwencji

$$(3.10) \quad |x - c_j| < 2|x - y|, \quad |x - y| \leq |x - c_j| + |c_j - y| \leq 2|x - c_j|.$$

Funkcje b_j mają całkę zero, więc

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb_j(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \left| \int b_j(y) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j} \right) dy \right| dx \\
 (3.11) \qquad &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \int_{I_j} |b_j(y)| \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|} dy dx \\
 &\leq \int_{I_j} \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} |b_j(y)| \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2} dx dy \\
 &\leq 2 \|b_j\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\sum_j \int_{\mathbb{R} \setminus \Omega^*} |Hb_j| \leq 2 \sum_j \int_{I_j} |b_j(y)| dy \leq 4 \|f\|_{L^1}.$$

Dowód słabego typu (1,1) jest zakończony stosując nierówność Czebyszewa i w powiązaniu z ostatnią nierównością. Stosując modyfikację dowodu twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza, mamy że dla $1 < p \leq 2$ zachodzi

$$\|Hf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Jeśli teraz $f \in \mathcal{S}$, $2 < p < \infty$, to

$$\begin{aligned}
 \|Hf\|_p &= \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|g\|_{p'} \leq 1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} Hf \cdot g \right| \right\} \\
 (3.12) \qquad &= \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|g\|_{p'} \leq 1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f \cdot Hg \right| \right\} \\
 &\leq \|f\|_p \|Hg\|_{p'} \leq C \|f\|_p \|g\|_{p'}.
 \end{aligned}$$

□

3.4. Transformaty obcięte - zbieżność punktowa. Przypomnijmy, że dla $f \in \mathcal{S}$ udowodniliśmy, że $\|Hf\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$, $1 < p < \infty$, i $|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq C_1 \lambda^{-1} \|f\|_{L^1}$, gdzie

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Pozwoliło to zdefiniować Hf dla $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ jako ograniczony operator. Ponadto dla $f \in L^1$ możemy zdefiniować Hf jako funkcję mierzalną w sposób następujący. Niech $f_n \in \mathcal{S}$, $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$. Wówczas

$$|\{x : |Hf_n(x) - Hf_m(x)| > \lambda\}| \leq C_1 \lambda^{-1} \|f_n - f_m\|_{L^1}.$$

Zadanie 3.4. Udowodnij, że powyższa nierówność implikuje, że $\lim_{n \rightarrow \infty} Hf_n(x)$ zbiega według miary do funkcji mierzalnej.

Zatem mamy dobrze zdefiniowaną funkcję mierzalną Hf dla $f \in L^1$.

Zdefiniujmy operator obcięty H_ε transformacji Hilberta wzorem,

$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

i odpowiadający tej rodzinie operator maksymalny

$$H^*f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f(x)|.$$

3.13. Twierdzenie. *Istnieje stała C_p , $1 \leq p < \infty$, że*

$$\|H_\varepsilon f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

$$|\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| \leq C_1 \lambda^{-1} \|f\|_1.$$

D o w ó d . Zauważmy, że dla funkcji ψ_ε zdefiniowane w sekcji 3.2 mamy

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |y| < N} \frac{e^{-2\pi i y \xi}}{y} dy \\ &= -2i \operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{2\pi \varepsilon |\xi|}^{2\pi N |\xi|} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

co jest jednostajnie ograniczone. Stąd H_ε mają wspólnie ograniczone normy jako operatory na L^2 . Dalej postępujemy jak w dowodzie słabego typu (1.1) dla transformacji Hilberta i uzyskujemy, że operatory H_ε mają wspólnie ograniczone normy słabego typu (1.1). Przedstawimy tutaj jedynie jeden etap rozumowania szacującego $H_\varepsilon b(x)$ dla $x \notin \Omega^*$.

Niech $x \notin \Omega^*$. Ustalmy b_j . Mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \leq \int |b_j(y)| \left| \frac{1}{x-y} \chi_{B_\varepsilon}(x-y) - \frac{1}{x-c_j} \chi_{B_\varepsilon}(x-c_j) \right| dy.$$

Mamy następujące możliwości.

(i) Dla każdego $y \in I_j$ zachodzi $|x-y| > \varepsilon$. Wtedy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \leq C \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2} \|b_j\|_{L^1}.$$

(ii) Dla każdego $y \in I_j$ zachodzi $|x-y| \leq \varepsilon$. Wtedy $H_\varepsilon b_j(x) = 0$.

(iii) Istnieją $y', y'' \in I_j$, że $|x-y'| < \varepsilon < |y''-x|$. Wtedy

(1) $r_j < \varepsilon$

(2) $I_j \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$

(3) $\varepsilon < 3|x-y|$ dla każdego $y \in I_j$.

Istotnie $2r_j < |c_j-x| \leq |c_j-y'| + |y'-x| \leq r_j + \varepsilon$ co daje (1). Aby sprawdzić (2) zauważmy, że dla $y \in I_j$ mamy $|y-x| \leq |y-y'| + |y'-x| < 2r_j + \varepsilon \leq 3\varepsilon$. Przejdźmy do dowodu (3). Mamy $\varepsilon < |x-y''| \leq |x-y| + |y-y''| \leq |x-y| + 2r_j \leq |x-y| + 2|x-y|$. Zauważmy, że w dowodzie (1) i (2) korzystaliśmy tylko z tego, że $|y'-x| < \varepsilon$.

Wróćmy do szacowania $H_\varepsilon b_j$. Mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \leq C \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| \frac{1}{|x-c_j|} dy \leq C' \frac{1}{6\varepsilon} \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| dy.$$

Ostatecznie $|H_\varepsilon b(x)| \leq C \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|} \|b_j\|_{L^1} + |b| * h_\varepsilon$, gdzie $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{6\varepsilon} \chi_{(-3\varepsilon, 3\varepsilon)}(x) \in L^1$. Ostatni operator jest ograniczony na L^1 z normą niezależną od ε . Zatem słaby

typ (1,1) i niezależność stałej w słabym typie jest udowodniona poprzez powtórzenie fragmentu dowodu twierdzenia o słabym typie transformacji Hilberta.

Stąd i z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza, mamy istnienie stałych C_p , $1 < p < 2$. Dla $p > 2$ istnienie stałych wynika z dualności. \square

Zadanie 3.5. udowodnij, że $H_\varepsilon f \rightarrow Hf$ w normie L^p .

Zajmiemy się teraz zbieżnością prawie wszędzie $H_\varepsilon f$.

3.15. Twierdzenie. Dla funkcji $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, mamy

$$H^* f(x) \leq M(Hf)(x) + CMf(x).$$

D o w ó d. Niech $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$ będzie funkcją symetryczną, dodatnią, malejącą na $(0, \infty)$ o całce 1. Wówczas

$$\frac{1}{y} \chi_{\{|y:|y|>\varepsilon\}} = \left(\text{p.v.} \frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon \right)(y) + \left[\frac{1}{y} \chi_{\{|y:|y|>\varepsilon\}} - \left(\text{p.v.} \frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon \right)(y) \right]$$

Niech

$$k_\varepsilon(y) = \left[\frac{1}{y} \chi_{\{|y:|y|>\varepsilon\}} - \left(\text{p.v.} \frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon \right)(y) \right]$$

Dla $|y| > 2\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} |k_\varepsilon(y)| &\leq \left| \int_{|x|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-x} \right) dx \right| \\ (3.16) \quad &\leq \int_{|x|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) \frac{|x|}{|y||y-x|} dx \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{|y|^2}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, dla $|y| \leq 2\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} |k_\varepsilon(y)| &\leq \frac{C}{\varepsilon} + \left| \lim_{t \rightarrow 0} \int_{3\varepsilon > |x| > t} \frac{\varphi_\varepsilon(y-x) - \varphi_\varepsilon(y)}{x} dx \right| \\ (3.17) \quad &\leq \frac{C}{\varepsilon} + \int_{|x|<3\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\varphi(y/\varepsilon - x/\varepsilon) - \varphi(y/\varepsilon)}{x} \right| dx \\ &= \frac{C}{\varepsilon} + \int_{|x|<3\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\varphi(y/\varepsilon - x) - \varphi(y/\varepsilon)}{x} \right| dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Zatem $|k_\varepsilon(y)| \leq \psi_\varepsilon(y)$, gdzie $\psi(y) = \frac{C}{1+y^2}$.

Ponadto dla $f \in \mathcal{S}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f * \left(\text{p.v.} \frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon \right)(x) = \left(f * \text{p.v.} \frac{1}{x} \right) * \varphi_\varepsilon(x)$$

Zauważmy, że powyższe sploty są funkcjami ciągłymi x . Zatem dla $f \in \mathcal{S}$ i $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f * (H\varphi_\varepsilon)(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x)$$

(Sugeruję przeanalizować czytelnikowi powyższą równość). Wzór ten przedłuża się na $f \in L^p$ poprzez zastosowanie przejścia granicznego i nierówności Höldera. Zatem mamy dla $f \in L^p$, $1 < p < \infty$,

$$f * (H\varphi_\varepsilon)(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x)$$

i powyższa funkcja jest funkcją ciągłą x .

Mamy więc

$$H_\varepsilon f(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x) + f * k_\varepsilon(x)$$

co w powiązaniu z wyprowadzonymi szacowaniami i twierdzeniem o radialnej majorancie daje twierdzenie. \square

3.18. Wniosek. *Operator H^* jest mocnego typu (p, p) dla $1 < p < \infty$ i dla $f \in L^p$ $H_\varepsilon f \rightarrow Hf$ w normie L^p i prawie wszędzie.*

D o w ó d . Dla $f \in L^p$ niech $f_n \in \mathcal{S}$, $f_n \rightarrow f$ w L^p . Mamy

$$\|H_\varepsilon f - Hf\|_p \leq \|H_\varepsilon(f - f_n)\|_p + \|H_\varepsilon f_n - Hf_n\|_p + \|Hf_n - Hf\|_p.$$

Pozostaje wykazać, że $\|H_\varepsilon f_n - Hf_n\|_p \rightarrow 0$ przy ustalonym f_n . Ale $H_\varepsilon f_n$ mają wspólną majorantę w L^p . Dla zbieżności prawie wszędzie rozważmy rodzinę operatorów $T_\varepsilon = H_\varepsilon - H + I$ i zastosować twierdzenie z rozdziału 2.2. \square

3.19. Twierdzenie. *Operator H^* jest słabego typu $(1, 1)$.*

D o w ó d . Dla $f \in L^1$ niech I_j będą odcinkami z rozkładu C-Z na poziomie $\lambda > 0$. Piszemy

$$f = g + b = g + \sum_j b_j$$

Wiemy, że H^* jest mocnego typu $(2, 2)$, więc

$$|\{x : |H^*g(x)| \leq \lambda/2\}| \leq C\|g\|_{L^2}^2 \lambda^{-2} \leq C\|f\|_{L^1} \lambda^{-1}.$$

Wystarczy udowodnić,

$$|\{x \notin \Omega^* : H^*b(x) > \lambda/2\}| \leq C\lambda^{-1}\|b\|_{L^1}.$$

Ustalmy $x \notin \Omega^*$, $\varepsilon > 0$ i I_j . Wówczas zachodzi jedna z możliwości

- 1) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I_j = I_j$,
- 2) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I_j = \emptyset$,
- 3) $x - \varepsilon \in I_j$ albo $x + \varepsilon \in I_j$.

W pierwszym przypadku $H_\varepsilon b_j(x) = 0$.

W drugim przypadku $H_\varepsilon b_j(x) = Hb_j(x)$. Zatem stosując te same argumenty co przy dowodzie słabego typu (1,1) dla H mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \leq \frac{|I_j|}{|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1}.$$

W trzecim przypadku, $I_j \subset (x - 3\varepsilon, x + 3\varepsilon)$ i dla $y \in I_j$ mamy $|x - y| > \varepsilon/3$. Dlatego

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \leq \int_{I_j} \frac{|b_j(y)|}{|x - y|} dy \leq \frac{3}{\varepsilon} \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| dy.$$

Sumując po j mamy

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon b(x)| &\leq \sum_j \frac{|I_j|}{|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\varepsilon} \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b(y)| dy \\ &\leq \sum_j \frac{|I_j|}{|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1} + CMb(x). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} (3.20) \quad |\{x \notin \Omega^* : H^*b(x) > \lambda/2\}| &\leq |\{x \notin \Omega^* : \sum_j \frac{|I_j|}{|x - c_j|^2} \|b_j\|_{L^1} > \lambda/4\}| \\ &\quad + |\{x : Mb(x) > \lambda/4\}| \\ &\leq \lambda^{-1} \sum_j \|b_j\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{|x - c_j|^2} dx + C\lambda^{-1} \|b\|_1 \\ &\leq C\lambda^{-1} \|b\|_{L^1} \end{aligned}$$

□

3.5. Mnożniki. Dla funkcji $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiujemy operator T_m ograniczony na $L^2(\mathbb{R}^n)$ wzorem

$$(T_m f)^\wedge(\xi) = m(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Mamy z twierdzenia Plancherela

$$\|T_m f\|_2 \leq \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

Zadanie 3.6. $\|T_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|m\|_\infty$.

Interesującym zagadnieniem jest znalezienie warunków na m gwarantujących ograniczoność T_m na L^p (w sensie ograniczoności na gęstej klasie funkcji z L^p).

Jeśli $m(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)$, to $T_m = H$.

Oznaczmy przez M_a operator mnożenia przez funkcje $e^{2\pi i a x}$, tj $M_a f(x) = e^{2\pi i a x} f(x)$. Wówczas mamy $\mathcal{F}(M_a f)(\xi) = f(\xi - a)$. Obliczmy $\mathcal{F}(M_a H M_{-a} f)(\xi)$ dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mamy

$$\mathcal{F}(M_a H M_{-a} f)(\xi) = \mathcal{F}(H M_{-a} f)(\xi - a) = -i \operatorname{sgn}(\xi - a) \mathcal{F}(M_{-a} f)(\xi - a) = -i \operatorname{sgn}(\xi - a) \mathcal{F}f(\xi).$$

Zatem operator $M_a H M_{-a}$ jest operatorem mnożnikowym z mnożnikiem $-i \operatorname{sgn}(\xi - a)$. Z drugiej strony operator ten jest ograniczony na L^p i słabego typu (1,1).

Z kolei dla $a < b$ operator

$$S_{a,b} = \frac{i}{2}(M_a H M_{-a} - M_b H M_{-b})$$

jest operatorem mnożnikowym z mnożnikiem $m_{a,b}(\xi) = \chi_{(a,b)}(\xi)$. Jest on ograniczony na L^p , $1 < p < \infty$, i słabego typu $(1,1)$.

Zauważmy, że $\|S_{a,b}f\|_p \leq C_p \|f\|_p$ ze stałą C_p niezależną od a, b . Stąd kładąc $b = -R$, $a = R$ jako wniosek mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_{-R,R} f \rightarrow f$$

w normie L^p , $1 < p < \infty$. Aby to udowodnić, wystarczy pokazać

Zadanie 3.7. Zbieżność zachodzi dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3.21. Twierdzenie. *Jeśli m jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R}^n)$, wówczas funkcje zdefiniowane poprzez $m(\xi + a)$, $m(\lambda\xi)$, $m(\rho\xi)$, gdzie ρ jest ortogonalnym odwzorowaniem, są mnożnikami na L^p z tą samą normą co T_m .*

D o w ó d . Dowód jest konsekwencją wzorów na transformatę Fouriera. Istotnie,

$$T_{m(\xi+a)}f(x) = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi+a)\widehat{f}(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\tau_a(m(\xi)\widehat{f}(\xi-a)))(x) = e^{2\pi i a x} T_m(M_{-a}f)(x).$$

Dalej

$$\begin{aligned} T_{m(\lambda\xi)}f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(m(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\delta_\lambda(m(\xi)\delta_{\lambda^{-1}}\widehat{f}(\xi)))(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}(f_\lambda(\xi))))_{\lambda^{-1}}(x) = ((T_m f)_\lambda)_{\lambda^{-1}}(x). \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy dla ρ ortogonalnego. \square

3.22. Twierdzenie. *Jeśli m jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R})$, to $\tilde{m}(\xi) = m(\xi_1)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

D o w ó d . Zauważmy, że $T_{\tilde{m}}f(x) = T_m f(\cdot, x_2, x_3, \dots, x_n)(x_1)$. Stąd, stosując twierdzenie Fubniego, mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\tilde{m}}f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |T_m f(\cdot, x_2, x_3, \dots, x_n)(x_1)|^p dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

\square

3.23. Wniosek. *Jeśli $m(\xi)$ jest funkcja charakterystyczna wielościanu P , to m jest mnożnikiem na L^p , $1 < p < \infty$. Ponadto, jeśli $0 \in \text{in} P$, i m_λ jest funkcja charakterystyczna λP , to $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_{m_\lambda} f \rightarrow f$ w normie L^p*

Zadanie 3.8. Niech $f \in L^1$, $\text{supp } f \in B_1$. Wówczas $Mf \in L^1(B_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{B_1} |f(x)| \log^+(|f(x)|) dx < \infty$.

Wskazówka. Udowodnij najpierw nierówności

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C\lambda^{-1} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda/2\}} |f(x)| dx,$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \geq c\lambda^{-1} \int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)| dx,$$

4. CAŁKI SINGULARNE.

W niniejszym rozdziale rozważać będziemy operatory całkowe na \mathbb{R}^n postaci

$$(4.1) \quad Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y) dy,$$

gdzie Ω jest zdefiniowana na sferze jednostkowej S^{n-1} całkowalna o całce 0, i $y' = y/|y|$.

Wzór (4.1) jest zdefiniowany dla $f \in \mathcal{S}$ i jest splotem z dystrybucją temperowaną

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y) dy \\ &= \int_{|y| < 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} [f(y) - f(0)] + \int_{|y| > 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y) dy \end{aligned}$$

zwaną p.v. $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$

Mamy oznaczenie $Tf(x) = f * T(x)$.

4.3. Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym na to, aby (4.2) definiowała dystrybucję temperowaną jest $\int_{S^{n-1}} \Omega(u) d\sigma(u) = 0$.*

Dowód. Niech $f \in \mathcal{S}$, $f(x) = 1$ dla $|x| < 1$. Wówczas

$$\langle T, f \rangle = \int_{|y| > 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y) dy + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < 1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy.$$

Pierwsza z całek jest zbieżna, ale druga zapisana we współrzędnych sferycznych jest równa $\int_{S^{n-1}} \Omega \cdot \log(1/\varepsilon)$. \square

4.1. Funkcje i dystrybucje jednorodne i ich transformaty Fouriera. Funkcje f nazywamy jednorodną stopnia a jeśli dla każdego $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ i i każdej liczby $\lambda > 0$ mamy

$$f(\lambda x) = \lambda^a f(x).$$

Wówczas dla funkcji ϕ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi_\lambda(x) dx = \lambda^a \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx.$$

Mówimy, że dystrybucja T jest jednorodna stopnia a , gdy

$$\langle T, \phi_\lambda \rangle = \lambda^a \langle T, \phi \rangle$$

dla $\phi \in \mathcal{S}$.

4.4. Twierdzenie. *Jeśli dystrybucja temperowana T jest jednorodna stopnia a , to jej transformacja Fouriera jest jednorodna stopnia $-n - a$.*

D o w ó d .

$$\langle \widehat{T}, f_\lambda \rangle = \langle T, \mathcal{F}(f_\lambda) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(f)(\lambda \cdot) \rangle = \langle T, \lambda^{-n}(\mathcal{F}f)_{\lambda^{-1}} \rangle = \lambda^{-n-a} \langle T, \widehat{f} \rangle = \lambda^{-n-a} \langle \widehat{T}, f \rangle.$$

Dowód twierdzenia jest zakończony. \square

Zadanie 4.1. Niech $f(x) = |x|^{-a}$, $\frac{n/2}{<}a < n$. Udowodnij, że $\widehat{f}(\xi) = c_{n,a}|\xi|^{a-n}$.

4.5. **Twierdzenie.** Jeśli Ω jest całkowaną funkcją na S^{n-1} o całce zero, to transformata Fouriera dystrybucji p.v. $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ jest funkcją jednorodną stopnia zero daną wzorem

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) [\log(1/|u \cdot \xi'|) - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(u \cdot \xi')] d\sigma(u).$$

D o w ó d . Transformata Fouriera jest jednorodną dystrybucją stopnia zero. Obliczymy $m(\xi)$ dla $\xi \in S^{n-1}$. W tym celu dla $\varepsilon < 1 < R$ niech

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon,R}(\xi) &= \int_{\varepsilon < |y| < R} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} e^{-2\pi i y \xi} dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\varepsilon}^1 (e^{-2\pi i r u \xi} - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^R e^{-2\pi i r u \xi} \frac{dr}{r} \right] d\sigma(u) \\ (4.6) \quad &= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\varepsilon}^1 (\cos(2\pi r u \xi) - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^R \cos(2\pi r u \xi) \frac{dr}{r} \right] d\sigma(u) \\ &\quad + \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{\varepsilon}^R \sin(2\pi r u \xi) \frac{dr}{r} \right] d\sigma(u) \\ &= I_{\varepsilon,R}(\xi) - iJ_{\varepsilon,R}(\xi). \end{aligned}$$

Możemy przyjąć, że $u \cdot \xi \neq 0$. Stosując zamianę zmiennych $s = 2\pi r |u \cdot \xi|$ mamy

$$J_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} \operatorname{sgn}(u\xi) \sin(s) \frac{ds}{s} d\sigma(u)$$

Stąd łatwo mamy, że $J_{\varepsilon,R}(\xi)$ są wspólnie ograniczone przez $C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$ niezależnie od ε i R i zbiegają do $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(u \cdot \xi)$.

Przejdźmy do $I_{\varepsilon,R}(\xi)$. Po tej samej zamianie zmiennych dostajemy

$$(4.7) \quad I_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} \cos(s) \frac{ds}{s} - \int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|} \frac{ds}{s} \right] d\sigma(u).$$

Zajmiemy się badaniem wewnętrznych całek W . Mamy 3 przypadki.

1. $\varepsilon 2\pi|u\xi| < 1 < R 2\pi|u\xi|$. Wtedy

$$W = \left[\int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^1 (\cos(s) - 1) \frac{ds}{s} + \int_1^{2\pi|u\xi|R} \cos(s) \frac{ds}{s} - \int_1^{2\pi|u\xi|} \frac{ds}{s} \right].$$

Ponadto W jest ograniczona przez $C + C \log |u \cdot \xi|$.

2. $\varepsilon 2\pi|u\xi| < R 2\pi|u\xi| < 1$. Wtedy

$$W = \int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} (\cos(s) - 1) \frac{ds}{s} - \int_{2\pi|u\xi|}^{2\pi|u\xi|R} \frac{ds}{s}$$

i podobnie jak wyżej W jest ograniczone przez $C + C \log |u \cdot \xi|$.

3. $1 < \varepsilon 2\pi|u\xi| < R 2\pi|u\xi|$. Wtedy z (4.7) mamy, że W jest ograniczone przez $C + C \log |u \cdot \xi|$. Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ i $R \rightarrow \infty$ mamy

$$W_{\varepsilon,R}(\xi) \rightarrow \int_0^1 (\cos(s) - 1) \frac{ds}{s} + \int_0^\infty \frac{\cos s}{s} ds - \log |2\pi| - \log |u \cdot \xi|.$$

Obliczając całkę zewnętrzną pamiętając, że całka z Ω jest równa zero, mamy wzór na $m(\xi)$. \square

Dla funkcji Ω , całkowanej na S^{n-1} o całce zero niech

$$\Omega_e(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) + \Omega(-u)), \quad \Omega_o(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) - \Omega(-u)).$$

Obie funkcje mają całkę zero.

Zadanie 4.2.

4.8. **Wniosek.** *Jeśli $\Omega_o \in L^1(S^{n-1})$, $\Omega_e \in L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $q > 1$, to transformata Fouriera m dystrybucji p.v. $\frac{\Omega(y')}{|y|^n}$ jest funkcją ograniczoną.*

4.2. **Metoda rotacji.** Niech T będzie jednowymiarowym operatorem podliniowym ograniczonym na $L^p(\mathbb{R})$. Dla $u \in S^{n-1}$ zdefiniujemy operator T_u na \mathbb{R}^n w następujący sposób. Niech $L_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ i niech L_u^\perp będzie podprzestrzenią prostopadłą do L_u . Dla $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x_1 i dokładnie jeden wektor $\bar{x} \in L_u^\perp$, że $x = x_1 u + \bar{x}$. Niech

$$T_u f(x) = T f(\cdot u + \bar{x})(x_1).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p dx &= \int_{L_u^\perp} \int_{\mathbb{R}} |T f(\cdot u + \bar{x})(x_1)|^p dx_1 d\bar{x} \leq C \int_{L_u^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f(\cdot u + \bar{x})(x_1)|^p dx_1 d\bar{x} \\ &= \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

Rozważmy sytuację gdy M jest jednowymiarową funkcją maksymalną Hardy'ego-Littlewooda. Wówczas

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x - tu)| dt.$$

Z kolei dla transformaty Hilberta H operator H_u ma postać

$$H_u f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x - tu) \frac{dt}{t}.$$

4.9. Wniosek. Niech T będzie podliniowym operatorem na $L^p(\mathbb{R})$. Dla $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ niech

$$T_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u).$$

Wówczas $\|T_\Omega\|$ jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R}^n)$ i jego norma jest ograniczona przez $\|T\|\|\Omega\|_{L^1}$.

D o w ó d . Zastosować nierówność Minkowskiego. \square

Zobaczmy postać M_Ω .

$$M_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \sup_{h>0} \int_{-h}^h |f(x-tu)| dt d\sigma(u).$$

Zdefiniujmy operator \mathbb{M}_Ω wzorem

$$\mathbb{M}_\Omega f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B((0,R))} |\Omega(y')| |f(x-y)| dy.$$

Wówczas stosując współrzędne biegunowe mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\Omega f(x) &= \sup_{R>0} \frac{1}{|B_1|R^n} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_0^R |f(x-ru)| r^{n-1} dr d\sigma(u) \\ &\leq C \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|r|<R} |f(x-ru)| \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} dr d\sigma(u) \leq C \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| M_u f(x) d\sigma(u). \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do H_Ω . Pokażemy, że otrzymamy całki singularne postaci (4.1) dla nieparzystych funkcji Ω .

Niech $f \in \mathcal{S}$. Stosując współrzędne sferyczne całkę (4.1) zapisujemy

$$\begin{aligned} (4.10) \quad T f(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_{|t|>\varepsilon} f(x-tu) \frac{dt}{t} d\sigma(u) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x) d\sigma(u). \end{aligned}$$

4.11. Wniosek. Operator całki singularnej (4.1) dla Ω nieparzystego i całkownego jest ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.

W identyczny sposób dowodzimy, że

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y) dy \right|$$

spełnia

$$T^* f(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| H_u^* f(x) d\sigma(u).$$

Stąd

4.12. **Wniosek.** T^* jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 < p < \infty$. Ponadto granica w (4.1) istnieje prawie wszędzie.

4.3. **Transformata Riesz.** Dla $n \geq 2$ i $j = 1, 2, \dots, n$, definiujemy transformatę Riesz R_j wzorem

$$R_j f(x) = c_n \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy.$$

Oczywiście jest to operator postaci (4.1) z funkcją $\Omega_j(u) = u_j$ nieparzystą klasy C^∞ na sferze. Jest to operator splotu z dystrybucją p.v. $\frac{\Omega_j(y')}{|y|^n}$. Obliczmy transformatę Fouriera tej dystrybucji. W tym celu zauważmy

$$\text{Zadanie 4.3. } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|x|^{n-1}} \right) = (1-n) \text{p.v.} \frac{x_j}{|x|^{n+1}}.$$

Zatem stosując twierdzenie o transformacie Fouriera dystrybucji jednorodnych z rozdziału 4.1 mamy

$$\begin{aligned} (1-n) \left(\text{p.v.} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)^\wedge(\xi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} \right)^\wedge(\xi) \\ (4.13) \qquad \qquad \qquad &= ci \xi_j (|x|^{-n+1})^\wedge(\xi) \\ &= -i \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{\xi_j}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Powyższy wzór implikuje (po odpowiednim doborze stałej c_n) dla $f \in \mathcal{S}$

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 f = -f.$$

4.4. **Całki singularne z jądrem parzystym.** Niech Ω będzie funkcją parzystą na sferze o calce zero należąca do $L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $1 < q < \infty$. Będziemy dystrybucję postaci (4.2) i operator postaci (4.1). Rozkładając dystrybucję T na sumę dwóch, których jedna ma nośnik zwarty w otoczeniu zera, mamy $Tf \in \mathcal{S} + L^r$ dla każdego $1 < r \leq q$.

Niech

$$K_\varepsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \chi_{\{|x|>\varepsilon\}}(x).$$

Mamy $K_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < r \leq q$. Zatem dla $f \in \mathcal{S}$ funkcje $R_j(K_\varepsilon * f)$ i $(R_j K_\varepsilon) * f$ są w L^r i stosując transformatę Fouriera łatwo wykazać, że są sobie równe.

4.14. **Lemat.** Istnieje funkcja \tilde{K}_j nieparzysta jednorodna stopnia $-n$, taka, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_j K_\varepsilon(x) = \tilde{K}_j(x)$$

w normie L^∞ na każdym zbiorze zwartym niezawierającym 0 (nawet na zbiorze $\{|x| > a\}$)

D o w ó d . Niech $0 < \varepsilon < \nu < a < \frac{|x|}{2}$. Stosując po drodze $\int \Omega = 0$ mamy

(4.15)

$$\begin{aligned} R_j K_\varepsilon(x) - R_j K_\nu(x) &= c_n \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} \chi_{\{|x-y|>\delta\}}(x - y) [K_\varepsilon(y) - K_\nu(y)] dy \\ &= c_n \int_{\varepsilon < |y| < \nu} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy \\ &= c_n \int_{\varepsilon < |y| < \nu} \left[\frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right] \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej mamy

$$(4.16) \quad |R_j K_\varepsilon(x) - R_j K_\nu(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n+1}} \int_{\varepsilon < |y| < \nu} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}} dy \leq \frac{C\nu}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$$

Stąd $R_j K_\varepsilon(x)$ jest ciągiem Cauchego na $\{|x| > a\}$ przy $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Zatem

$$K_j^*(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon(x)$$

i granica istnieje prawie wszędzie. Ponadto $K_j^*(x)$ jest funkcją nieparzystą prawie wszędzie. Zdefiniujemy teraz funkcję \tilde{K}_j nieparzystą (wszędzie) równą K_j^* prawie wszędzie spełniającą $\tilde{K}_j(\lambda x) = \lambda^{-n} \tilde{K}_j(x)$ wszędzie. W tym celu ustalmy $\lambda > 0$ Wówczas dla prawie każdego x mamy

$$(4.17) \quad \begin{aligned} R_j K_\varepsilon(\lambda x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \int \frac{\lambda x_j - y_j}{|\lambda x - y|^{n+1}} K_\varepsilon(y) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} c_n \int_{|x-y|>\delta/\lambda} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} \lambda^{-n} K_{\varepsilon/\lambda}(y) dy \\ &= \lambda^{-n} R_j K_{\varepsilon/\lambda} K(x). \end{aligned}$$

Stąd przy ustalony $\lambda > 0$ dla prawie każdego x mamy $K_j^*(\lambda x) = \lambda^{-n} K_j^*(x)$. Zbiór $D = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) : K_j^*(\lambda x) \neq \lambda^{-n} K_j^*(x)\}$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Wynika to z twierdzenia Fubinięgo. Stąd istnieje $\rho > 0$, że sfera $S_\rho = \{x : |x| = \rho\}$ ma własność taką, że dla prawie każdego $x \in S_\rho$ mamy $\{x\} \times (0, \infty) \cap D$ ma miarę zero na $(0, \infty)$. Zatem istnieje zbiór $A \subset S_\rho$ miary pełnej na sferze S_ρ , że $\{x\} \times (0, \infty) \cap D$ ma miarę zero dla każdego $x \in A$. Wówczas

$$(4.18) \quad \tilde{K}_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^n K_j^*\left(\frac{\rho x}{|x|}\right) & \text{dla } \frac{\rho x}{|x|} \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

jest szukaną funkcją. \square

4.19. Lemat.

$$\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) \leq C_q \|\Omega\|_q.$$

Ponadto jeśli $\tilde{K}_{j,\varepsilon}(x) = \tilde{K}_j(x) \chi_{|x|>\varepsilon}(x)$, to $\Delta_\varepsilon = R_j K_\varepsilon - \tilde{K}_{j,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\exists C_q$, że $\forall \varepsilon > 0$:

$$\|\Delta_\varepsilon\|_{L^1} \leq C_q \|\Omega\|_q.$$

D o w ó d . Z jednorodności \tilde{K}_j mamy

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) &= \frac{1}{\log 2} \int_{1 < |x| < 2} |\tilde{K}_j(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{\log 2} \int_{1 < |x| < 2} |\tilde{K}_j(x) - R_j K_{1/2}(x)| dx + \frac{1}{\log 2} \int_{1 < |x| < 2} |R_j K_{1/2}(x)| dx \end{aligned}$$

We wzorze (4.16) niech $\nu = 1/2$, $|x| > 1$. Wówczas biorąc granicę przy $\varepsilon \rightarrow 0$ mamy

$$(4.21) \quad |\tilde{K}_j(x) - R_j K_{1/2}(x)| \leq \frac{C \|\Omega\|_{L^1}}{|x|^{n+1}}.$$

Stąd ograniczoność pierwszej całki przez $C \|\Omega\|_q$. Oszacujmy drugą całkę:

$$\int_{1 < |x| < 2} |R_j K_{1/2}(x)| dx \leq C \|R_j K_{1/2}\|_q \leq C \|K_{1/2}\|_q \leq C \|\Omega\|_q.$$

Przejdźmy do dowodu drugiej części lematu. Zauważmy, że $\Delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \Delta_1(x/\varepsilon)$. Zatem wystarczy pokazać $\|\Delta_1\|_1 < \infty$.

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \|\Delta_1\|_1 &= \int |R_j K_1(x) - \tilde{K}_{j,1}(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| < 2} |R_j K_1(x)| dx + \int_{1 < |x| < 2} |\tilde{K}_j(x)| dx + \int_{|x| > 2} |\Delta_1(x)| dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Mamy $I_1 \leq C \|R_j K_1\|_q \leq C \|K_1\|_q \leq \|\Omega\|_q$. Dalej $I_2 \leq C \|\Omega\|_q$. Aby oszacować I_3 stosujemy (4.16) dostając $|\Delta_1(x)| \leq C \|\Omega\|_1 |x|^{-n-1}$, co daje $I_3 \leq \|\Omega\|_q$. \square

4.23. Twierdzenie. Niech $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $q > 1$, $\int \Omega d\sigma = 0$, $\Omega(x) = \Omega(-x)$. Wówczas operator (4.1) jest ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.

D o w ó d . Dla $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon * f(x).$$

Dalej $K_\varepsilon f(x) = -\sum R_j (R_j K_\varepsilon) * f$. Mamy $(R_j K_\varepsilon) * f = \tilde{K}_{j,\varepsilon} * f + \Delta_\varepsilon * f$. Stosując fakt, że \tilde{K}_j jest jądrem nieparzystym, więc z wniosku 4.12 mamy

$$\|\tilde{K}_{j,\varepsilon} * f\|_{L^p} \leq C \int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) \|f\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p.$$

Ponadto,

$$\|\Delta_\varepsilon * f\|_p \leq C_q \|\Delta_\varepsilon\|_1 \cdot \|f\|_p \leq C_q \|\Omega\|_q \|f\|_p.$$

Powyższe dwie nierówności dają $\|K_\varepsilon f\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p$. Stosując lemat Fatou mamy $\|Tf\|_p \leq C \|\Omega\|_q \|f\|_p$. \square

5. TEORIA CALDERÓNA-ZYGMUNDA

5.1. Podstawy teorii Calderóna-Zygmunda.

5.1. Twierdzenie (Caldrón-Zygmund). *Niech $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, K pokrywa się z funkcją lokalnie całkowaną $K(x)$ na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, spełnia*

$$(5.2) \quad |\widehat{K}(\xi)| \leq A,$$

$$(5.3) \quad \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B$$

Wówczas

$$(5.4) \quad \|f * K\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$(5.5) \quad |\{x : |f * K(x)| > \lambda\}| < C\lambda^{-1} \|f\|_1$$

Warunek (5.3) nosi nazwę warunku Hörmandera.

Zadanie 5.1. Jeśli $|\nabla K(x)| \leq C|x|^{-n-1}$, dla $x \neq 0$ to spełniony jest warunek Hörmandera.

Dowód. Z (5.2) wynika $\|f * K\|_2 \leq A\|f\|_2$. Wystarczy udowodnić słaby typ (1,1) a potem zastosować twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza i otrzymać ograniczoność dla $1 < p < 2$. Dla $p > 2$ przechodzimy przez dualność, bo jądro operatora K^* to $K(-x)$. Możemy zakładać, że K jest funkcją rzeczywistą.

Niech $f \in \mathcal{S}$. Niech Q_j będzie rozkładem Calderóna-Zygmunda na poziomie $\lambda > 0$. Mamy

$$(5.6) \quad \begin{aligned} |\{x : |f * K(x)| > \lambda\}| &\leq |\bigcup 2Q_j| + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |f * K(x)| > \lambda\}| \\ &\leq C\lambda^{-1} \|f\|_1 + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |g * K(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |b * K(x)| > \lambda/2\}| \end{aligned}$$

□

Mamy $\|g\|_2^2 \leq \lambda \|f\|_1$. Zatem

$$|\{x \notin \bigcup 2Q_j : |g * K(x)| \geq \lambda/2\}| \leq C\lambda^{-2} \|g\|_2^2 \leq C\lambda^{-1} \|f\|_1.$$

Przejdźmy do funkcji b .

$$\begin{aligned}
|b * K(x)| &\leq \sum_j \left| \int_{Q_j} b_j(y) K(x-y) dy \right| \\
(5.7) \qquad &= \sum_j \left| \int_{Q_j} b_j(y) (K(x-y) - K(x-c_j)) dy \right| \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| |K(x-y) - K(x-c_j)| dy
\end{aligned}$$

Całkując względem $x \notin \bigcup 2Q_j$ i stosując twierdzenie Fubiniego mamy

$$\int_{x \notin \bigcup 2Q_j} |b * K(x)| dx \leq CB \|f\|_1,$$

co po zastosowaniu nierówności Czebyszewa kończy dowód twierdzenia.

Wróćmy do jąder jednorodnych $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. Co musimy założyć o Ω aby mieć zagwarantowany warunek Hörmandera? Niech

$$\omega_\infty(t) = \sup\{|\Omega(u_1) - \Omega(u_2)| : |u_1 - u_2| \leq t, u_1, u_2 \in S^{n-1}\}.$$

Mówimy, że Ω spełnia warunek Diniego, gdy

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt < \infty.$$

5.8. Lemat. *Jeśli Ω spełnia warunek Diniego, to $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ spełnia warunek Hörmandera.*

D o w ó d . Warunek Diniego implikuje, że Ω jest funkcją ograniczoną.

$$(5.9) \quad |K(x-y) - K(x)| \leq \frac{|\Omega((x-y)') - \Omega(x')|}{|x-y|^n} + |\Omega(x')| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right|.$$

Druga funkcja, z ograniczoności Ω i z twierdzenia o wartości średniej jest ograniczona na zbiorze $|x| > 2|y|$ przez $C \frac{|y|}{|x|^{n+1}}$, zatem całkowalna po tym zbiorze. Ponadto na zbiorze $|x| > 2|y|$ mamy

Zadanie 5.2.

$$|(x-y)' - x'| \leq C \frac{|y|}{|x|}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
(5.10) \quad \int_{|x|>2|y|} \frac{|\Omega((x-y)') - \Omega(x')|}{|x-y|^n} dx &\leq \int_{|x|>2|y|} \frac{\omega_\infty(4|y|/|x|)}{(|x|/2)^n} dx \\
&= 2|S^{n-1}| \int_0^2 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt \leq C.
\end{aligned}$$

□

5.11. **Wniosek.** *Jeśli Ω ma całkę zero i spełnia warunek Diniego, to operator*

$$Tf(x) = p.v. \int \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y) dy$$

jest słabego typu (1,1). Ograniczoność na L^p , $1 < p < \infty$ wynika także z metody rotacji.

Interesuje nas teraz pytanie przy jakich założeniach na jądro K jego transformata Fouriera jest funkcją ograniczoną? Odpowiedzią jest poniższy lemat.

5.12. **Lemat.** *Niech $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ będzie taki, że*

$$(5.13) \quad \left| \int_{a < |x| < b} K(x) dx \right| \leq A \quad \text{dla każdych } 0 < a < b,$$

$$(5.14) \quad \int_{a < |x| < 2a} |K(x)| dx \leq C \quad \text{dla każdego } a > 0,$$

$$(5.15) \quad \int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C \quad \text{dla każdego } y.$$

Niech $K_{\varepsilon, R}(x) = K(x)\chi_{\{\varepsilon < |x| < R\}}$. Wówczas

$$K_{\varepsilon, R} \hat{(\xi)} \leq D.$$

Stała D zależy jedynie od n , stałych A, B, C a nie jest zależna o d, ε, R .

D o w ó d . Zauważmy, że (5.14) jest równoważny

$$(5.16) \quad \int_{|x| < a} |x| |K(x)| \leq B'a$$

Istotnie

$$\int_{|x| < a} |x| |K(x)| dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}a < |x| < 2^{-j}a} 2^{-j}a |K(x)| dx \leq 2Ba.$$

Odwrotnie

$$\int_{a < |x| < 2a} |K(x)| dx \leq \int_{|x| < 2a} |K(x)| |x| a^{-1} \leq B'aa^{-1} \leq B'.$$

Ustalmy ξ . Jeśli $\varepsilon < |\xi|^{-1} < R$, to

$$(5.17) \quad \begin{aligned} K_{\varepsilon, R} \hat{(\xi)} &= \int_{\varepsilon < |x| < |\xi|^{-1}} K(x) e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_{|\xi|^{-1} < |x| < R} K(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= I_1(\xi) + I_2(\xi). \end{aligned}$$

Jeśli $|\xi|^{-1} < \varepsilon$, to rozważamy tylko I_2 . Jeśli $|\xi|^{-1} > R$, to tylko I_1 . Mamy

$$I_1 = \int_{\varepsilon < |x| < |\xi|^{-1}} K(x) dx + \int_{\varepsilon < |x| < |\xi|^{-1}} K(x) (e^{2\pi i x \xi} - 1) dx$$

Stosując założenia lematu i twierdzenie o wartości średniej mamy

$$|I_1| \leq A + C|\xi| \int_{\varepsilon < |x| < |\xi|^{-1}} |K(x)||x|dx \leq A + CB'.$$

Dla szacowania I_2 niech $z = \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|^2}$.

$$(5.18) \quad \begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi|^{-1} < |x-z| < R} K(x-z)e^{-2\pi i(x-z)\xi} dx \\ &= - \int_{|\xi|^{-1} < |x-z| < R} K(x-z)e^{-2\pi i x \xi} dx \end{aligned}$$

Stąd

$$2I_2 = \int_{|\xi|^{-1} < |x| < R} K(x)e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_{|\xi|^{-1} < |x-z| < R} K(x-z)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Co daje

$$(5.19) \quad \begin{aligned} |2I_2| &\leq \int_{|\xi|^{-1} < |x| < R + \frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x) - K(x-z)|dx + \int_{R < |x| < R + \frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \\ &\quad + \int_{R - \frac{1}{2}|\xi|^{-1} < |x| < R + \frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}|\xi|^{-1} < |x| < \frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \end{aligned}$$

Powyższa nierówność wynika z analizy obszarów całkowania i sprawdzenie jej poprawności zostawiamy jako ćwiczenie. Stosując założenia mamy

$$|2I_2| \leq D'.$$

□

5.20. Wniosek. *Załomy, że K spełnia założenia powyższego lematu. Wówczas*

$$\|f * K_{\varepsilon, R}\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$|\{x : |f * K_{\varepsilon, R}(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_1.$$

Stałe C_p zależą od wymiaru i stałych w warunkach lematu, nie zależą od ε i R .

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że

$$\int_{|x| > 2|y|} |K_{\varepsilon, R}(x-y) - K_{\varepsilon, R}(x)|dx \leq C$$

niezależnie od ε, R . Co jest kolejnym zadaniem. □

Naturalnym jest pytanie, kiedy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} f * K_{\varepsilon, R}(x)$ dobrze zdefiniowane. Mamy

5.21. Lemat. *Dane jest jądro spełniające warunek (5.14). Wówczas*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} K(x)f(x)dx$$

wyznacza dystrybucję temperwaną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} K(x) dx$$

istnieje.

D o w ó d . Zauważmy, że $\int_{|x|>1} f(x)K(x)dx$ istnieje. Istotnie dla $f \in \mathcal{S}$ mamy

$$\int_{|x|>1} |f(x)K(x)| dx \leq \|xf\|_{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k < |x| < 2^{k+1}} |K(x)| dx \leq 2B\|xf\|_{\infty}.$$

Dlatego

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} K(x)f(x) dx$$

musi istnieć dla dobrego zdefiniowania dystrybucji. Biorąc za $f \in \mathcal{S}$ funkcje równą 1 na kuli jednostkowej mamy, że jeśli całka zadaje dystrybucję, to warunek wyrażony w lemacie zachodzi.

Odwrotnie, założmy, że warunek wyrażony w lemacie zachodzi i granica równa się L . Wówczas

(5.22)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} f(x)K(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \left[(f(x) - f(0))K(x) + f(x)K(x) \right] dx \\ &= Lf(0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} (f(x) - f(0))K(x) dx \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia granica istnieje bo $|f(x) - f(0)| \leq C|x|$ i możemy zastosować warunek równoważny (5.14). \square

5.23. Wniosek. Założmy, że K spełnia warunki lematu 5.12 i 5.21. Wówczas operator zadany wzorem

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} K(y)f(x-y)dy$$

jest ograniczony na L^p , $1 < p < \infty$, i słabego typu $(1,1)$.

5.2. Lemat Cotlara. Poniższy lemat pozwala udowodnić ograniczoność na L^2 pewnych operatorów bez użycia transformaty Fouriera.

5.24. Twierdzenie (Lemat Cotlara). Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta a $\{T_j\}_j$ rodziną operatorów liniowych ograniczonych taką, że istnieje stała $C > 0$, że dla każdego i mamy

$$\sum_j \|T_j T_i^*\|^{1/2} \leq C, \quad \sum_j \|T_j^* T_i\|^{1/2} \leq C.$$

Wówczas dla każdego m, n mamy

$$\left\| \sum_{j=n}^m T_j \right\| \leq C,$$

to znaczy skończone sumy operatorów mają normy wspólnie ograniczone przez stałą C .

D o w ó d . Niech $S = \sum_{j=n}^m T_j$. Wówczas $\|S\|^2 = \|(SS^*)^k\|^{1/k}$. Ale

$$(SS^*)^k = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2k}}^m T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*.$$

Mamy

$$\|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_1} T_{j_2}^*\| \|T_{j_3} T_{j_4}^*\| \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|,$$

$$\|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_1}\| \|T_{j_2}^* T_{j_3}\| \|T_{j_4}^* T_{j_5}\| \dots \|T_{j_{2k-2}}^* T_{j_{2k-1}}\| \|T_{j_{2k}}^*\|.$$

Biorąc średnią geometryczną mamy

$$\begin{aligned} \|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| &\leq \|T_{j_1}\|^{1/2} \|T_{j_1} T_{j_2}^*\|^{1/2} \|T_{j_2}^* T_{j_3}\|^{1/2} \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|^{1/2} \|T_{j_{2k}}^*\|^{1/2} \\ &\leq C \|T_{j_1} T_{j_2}^*\|^{1/2} \|T_{j_2}^* T_{j_3}\|^{1/2} \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|^{1/2} \end{aligned}$$

Sumując kolejno po j_1 następnie po j_2 itd mamy

$$\|(SS^*)^k\| \leq C^{2k} (m - n + 1).$$

Zatem

$$\|S\| \leq C(m - n + 1)^{1/(2k)},$$

Obliczając granicę lewej strony przy $k \rightarrow \infty$ mamy wymaganą nierówność. \square

Zadanie. 5.3. Wykaż, że lemat Cotlara pociąga zbieżność szeregu

$$\lim_{n \rightarrow -\infty, m \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^n T_j x$$

dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Wskazówka: Rozważ skończone sumy operatorów postaci $\sum \varepsilon_j T_j$, gdzie $\varepsilon_j = 0, 1, -1$.

5.3. Operatory Calderóna-Zygmunda. Poniższe twierdzenie stanowi uogólnienie twierdzenia w przypadku, gdy operator T jest operatorem splotowym i ma identyczny dowód.

5.25. Twierdzenie. Niech T będzie ograniczonym operatorem na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że istnieje funkcja $K(x, y)$ określona na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$, gdzie $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, taka że dla $f \in L^2$ o nośniku zwartym zachodzi

$$(5.26) \quad Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy \quad \text{dla } x \notin \text{supp } f.$$

Założmy dodatkowo, że

$$(5.27) \quad \int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x, y) - K(x, z)| dx \leq C,$$

$$(5.28) \quad \int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x, y) - K(w, y)| dy \leq C.$$

Wówczas T jest słabego typu (1.1) i ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$. Stałe ograniczające normy operatora T zależą od wymiaru, p i stałej C w powyższych nierównościach.

Do dowodu słabego typu wykorzystuje się nierówność (5.27). Nierówność (5.28) potrzebna jest dla ograniczoności na L^p dla $p > 2$.

Definicja. K jest standardowym jądrem, gdy dla pewnych stałych $C, \delta > 0$ mamy

$$(5.29) \quad |K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n},$$

$$(5.30) \quad |K(x, y) - K(x, z)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{n+\delta}} \quad \text{dla } |x - y| > 2|y - z|,$$

$$(5.31) \quad |K(x, y) - K(w, z)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{n+\delta}} \quad \text{dla } |x - y| > 2|x - w|,$$

Zadanie 5.4. Wykaż, że jądro standardowe spełnia warunki (5.27) i (5.28).

Definicja. Operator T jest nazywany (uogólnionym) operatorem Calderóna-Zygmunda, gdy T jest ograniczony na L^2 i istnieje standardowe jądro $K(x, y)$, ze dla f o nośniku zwartym zachodzi

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy \quad \text{dla } x \notin \text{supp } f.$$

Uwaga: Operator Calderóna-Zygmunda nie musi być postaci

$$(5.32) \quad Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y)f(y) dy.$$

Przykład operatora Calderóna-Zygmunda nie będącego postaci (5.32) zostanie omówiony w dalszej części wykładu.

Definicja. Jeśli operator Calderóna-Zygmunda T zadany jest (5.32), to mówimy, że T jest operatorem Calderóna-Zygmunda zadanym całką singularną (principal value integral).

Zadanie 5.5. Na to, aby granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y)f(y)dy$$

istniała prawie wszędzie dla każdej funkcji $f \in C_c^\infty$ potrzeba i wystarcza, aby granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1 > |x-y| > \varepsilon} K(x, y) dy$$

istniała prawie wszędzie.

Zadanie 5.6. Udowodnij, że jeśli dwa operatory Calderóna-Zygmunda mają te same jądra, to ich różnica jest operatorem mnożenia przez funkcję ograniczoną.

Wskazówka. Rozważ funkcje $g_A(x) = T\chi_A(x)$, gdzie A jest zbiorem zwartym.

Będziemy się zajmować teraz operatorem Calderóna-Zygmunda zadany przez całkę singularną.

Oznaczmy

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y| > \varepsilon} K(x, y) f(y) dy.$$

Interesuje nas czy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x) = Tf(x)$$

prawie wszędzie? Pozytywną odpowiedź na to pytanie uzyskamy dowodząc

5.33. Twierdzenie. Niech T będzie operatorem Calderóna-Zygmunda zadany całką singularną. Oznaczmy

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

Wówczas T^* jest słabego typu $(1,1)$ i ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.

5.34. Lemat (Nierówność Kołmogorowa). Jeśli S jest słabego typu $(1,1)$, to dla każdego $0 < \nu < 1$ istnieje stała $C > 0$, że dla każdego zbioru E miary skończonej mamy

$$\int_E |Sf(x)|^\nu dx \leq C|E|^{1-\nu} \|f\|_1^\nu.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \int_E |Sf(x)|^\nu dx &= \nu \int_0^\infty \lambda^{\nu-1} |\{x \in E : |Sf(x)| > \lambda\}| d\lambda \\ &\leq \nu \int_0^\infty \lambda^{\nu-1} \min(|E|, C\lambda^{-1} \|f\|_1) d\lambda \\ (5.35) \quad &= \nu \int_0^{C\|f\|_1/|E|} \lambda^{\nu-1} |E| d\lambda + \nu \int_{C\|f\|_1/|E|}^\infty C\lambda^{\nu-2} \|f\|_1 d\lambda \\ &\leq C|E|^{1-\nu} \|f\|_1^\nu. \end{aligned}$$

□

5.36. **Lemat** (Nierówność Cotlara). *Jeśli T jest operatorem Calderóna-Zygmunda zadanyą całką singularną, to dla każdego $0 < \nu \leq 1$ istnieje stała $C > 0$, że dla $f \in C_c^\infty$ mamy*

$$T^*f(x) \leq C_\nu \left(M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} + Mf(x) \right).$$

D o w ó d . Udowodnimy, że

$$T_\varepsilon f(0) \leq C \left(M(|Tf|^\nu)(0)^{1/\nu} + Mf(0) \right)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $Q = B(0, \varepsilon/2)$, $2Q = B(0, \varepsilon)$, $f_1 = f\chi_{2Q}$, $f_2 = f - f_1$. Wówczas,

$$Tf_2(x) = \int_{|y|>\varepsilon} K(0, y)f(y) dy = T_\varepsilon f(0).$$

Jeśli $z \in Q$, to

$$\begin{aligned} |Tf_2(0) - Tf_2(z)| &\leq \left| \int_{|y|>\varepsilon} (K(z, y) - K(0, y))f(y) dy \right| \\ &\leq C|z|^\delta \int_{|y|>\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+\delta}} dy \\ (5.37) \quad &\leq C\varepsilon^\delta \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\varepsilon < |y| < 2^{k+1}\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+\delta}} dy \\ &\leq C\varepsilon^\delta (2^k\varepsilon)^{-\delta} \frac{1}{(2^k\varepsilon)^n} \int_{|y| < 2^{k+1}\varepsilon} |f(y)| dy \\ &\leq CMf(0). \end{aligned}$$

Stąd dla $z \in Q$ mamy

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon f(0)| = |Tf_2(0)| &\leq |Tf_2(0) - Tf_2(z)| + |Tf_2(z)| \\ (5.38) \quad &\leq CMf(0) + |Tf_1(z)| + |Tf(z)| \end{aligned}$$

Jeśli $T_\varepsilon f(0) = 0$, to nie ma czego dowodzić. Jeśli $T_\varepsilon f(0) \neq 0$, to niech $0 < \lambda < |T_\varepsilon f(0)|$ i

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/3\}, \\ Q_2 &= \{z \in Q : |Tf_1(z)| > \lambda/3\}, \\ (5.39) \quad Q_3 &= \begin{cases} \emptyset & \text{if } CMf(0) \leq \lambda/3, \\ Q & \text{if } CMf(0) > \lambda/3. \end{cases} \end{aligned}$$

Wówczas $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, a więc $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|$. Ale z nierówności Czebyszewa mamy

$$|Q_1| \leq 3\lambda^{-1} \int_Q |Tf(z)| dz \leq 3\lambda^{-1} |Q| M(Tf)(0).$$

Dalej ze słabego typu (1.1) dla T dostajemy

$$|Q_2| \leq 3C\lambda^{-1} \|f_1\|_1 = 3C\lambda^{-1} \int_{2Q} |f(z)| dz \leq 3C\lambda^{-1} |Q| Mf(0).$$

Dalej, jeśli $Q_3 = Q$, to $3CMf(0) > \lambda$. Jeśli $Q_3 = \emptyset$, to $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| \leq 3C\lambda^{-1}|Q|(Mf(0) + M(Tf)(0))$. Zatem w każdym przypadku

$$\lambda < 3C(Mf(0) + M(Tf)(0)).$$

Nierówność ta zachodzi dla każdego $\lambda < |T_\varepsilon f(0)|$, zatem

$$|T_\varepsilon f(0)| \leq 3C(Mf(0) + M(Tf)(0)).$$

Zatem mamy udowodnioną nierówność dla $\nu = 1$.

Jeśli $0 < \nu < 1$, to

$$|T_\varepsilon f(0)|^\nu \leq CMf(0)^\nu + C|Tf_1(z)|^\nu + |Tf(z)|^\nu.$$

Biorąc średnią po Q mamy

$$|T_\varepsilon f(0)|^\nu \leq CMf(0)^\nu + CM(|Tf|^\nu)(0) + \frac{C}{|Q|} \int_Q |Tf_1(z)|^\nu dz.$$

Stosując nierówność Kołmogorowa dostajemy

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(z)|^\nu dz \right)^{1/\nu} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} |Q|^{1-\nu} \|f_1\|_1^\nu \right)^{1/\nu} = \frac{C}{|Q|} \|f_1\|_1 \leq CMf(0).$$

Ostatnie trzy nierówności dają tezę. \square

Dowód. Dowód twierdzenia 5.33 dla $f \in C_c^\infty$. Ograniczoność na L^p dla $1 < p < \infty$ wynika z nierówności Cotlara dla $\nu = 1$ i ograniczoności T . Przejdźmy do dowodu słabego typu (1.1). Z nierówności Cotlara mamy

$$|\{x : |T^* f(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |Mf(x)| > \lambda/(2C)\}| + |\{x : (M(|Tf|^\nu)(x))^{1/\nu} > \lambda/2C\}|$$

Szacowanie pierwszego składnika jest oczywiste ze słabego typu dla M . Oznaczmy $E = \{x : (M_d(|Tf|^\nu)(x)) > 4^{-n}(\lambda/2C)^\nu\}$.

Zadanie 5.7. Wówczas drugi składnik jest szacowany przez $|E|$.

Zadanie 5.8. Jeśli $f \in C_c^\infty$, to miara $2^n|E|$ jest skończona zatem

$$|E| \leq \frac{C}{\lambda^\nu} \int_E |Tf(y)|^\nu dy;$$

bo w diadycznej funkcji maksymalnej wystarczy brać całkę po E zamiast po \mathbb{R}^n .

Stosując nierówność Kołmogorowa, mamy

$$|E| \leq C\lambda^{-\nu} |E|^{1-\nu} \|f\|_1^\nu.$$

Co daje $|E| \leq C\lambda^{-1} \|f\|_1$. \square

Dokończenie dowodu twierdzenia 5.33 Pozbędziemy się teraz założenia o przynależności f do C_c^∞ .

Udowodnimy słaby typ dla $f \in L^1$. Niech $f \in L^1$, $\|f\|_1 = 1$ i niech $f_n \in C_c^\infty$ będą takie, że $\|f - f_n\|_1 \leq 2^{-n-1}$, $f_0 = 0$.

5.40. Lemat. $|T^* f_n(x) - T^* f_m(x)| \leq T^*(f_n - f_m)(x)$.

D o w ó d . Ustalmy $\delta > 0$. Istnieje $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, że $T^*f_n(x) < |T_{\varepsilon_1}f_n(x)| + \delta$, $T^*f_m(x) < |T_{\varepsilon_2}f_m(x)| + \delta$. Możemy przyjąć, że $T^*f_n(x) > T^*f_m(x)$. Wówczas

$$\begin{aligned} |T^*f_n(x) - T^*f_m(x)| &= T^*f_n(x) - T^*f_m(x) \leq |T_{\varepsilon_1}f_n(x)| - |T_{\varepsilon_1}f_m(x)| + \delta \\ &\leq |T_{\varepsilon_1}f_n(x) - T_{\varepsilon_1}f_m(x)| + \delta \leq T^*(f_n - f_m)(x) + \delta. \end{aligned}$$

□

5.41. Lemat. $T^*f_n(x)$ zbiega prawie wszędzie przy $n \rightarrow \infty$.

D o w ó d .

$$T^*f_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x),$$

gdzie

$$g_k(x) = T^*f_k(x) - T^*f_{k-1}(x).$$

Udowodnimy, że szereg

$$\sum_n |g_n(x)|$$

jest zbieżny dla prawie wszystkich x . Ustalmy $A > 0$. Wówczas ze słabego typu (1.1) na funkcjach C_c^∞ i lematu 5.40 mamy

$$|\{x : |g_m(x)| > Am^{-2}\}| \leq |\{x : |T^*(f_m - f_{m-1})(x)| > Am^{-2}\}| \leq Cm^2A^{-1}2^{-m}.$$

Daje to

$$\left| \left\{ x : \sum_{m=1}^{\infty} |g_m(x)| > A \right\} \right| \leq \left| \bigcup \{x : |g_m(x)| > cAm^{-2}\} \right| \leq CA^{-1}.$$

Stąd mamy zbieżność szeregu prawie wszędzie. □

Niech $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^*f_n(x)$.

5.42. Lemat. $T^*f_n(x)$ zbiega do $F(x)$ według miary.

D o w ó d . Mamy

$$\begin{aligned} (5.43) \quad |\{x : |F(x) - T^*f_n(x)| > \delta\}| &\leq \left| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |g_{n+k}(x)| > \delta \right\} \right| \\ &\leq \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : |g_{n+k}(x)| > c\delta k^{-2}\} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \{x : |g_{n+k}(x)| > c\delta k^{-2}\} \right| \\ &\sum_{k=1}^{\infty} C\delta^{-1}k^22^{-n-k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$. □

Oznaczmy $L^*f(x) = \lim_n T^*f_n(x) = F(x)$.

5.44. **Lemat.** $L^*f(x)$ spełnia szacowania słabego typu (1.1)

D o w ó d .

$$\begin{aligned} |\{x : L^*f(x) > \lambda\}| &\leq |\{x : |F(x) - T^*f_n(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : T^*f_n(x) > \lambda/2\}| \\ &\leq |\{x : |F(x) - T^*f_n(x)| > \lambda/2\}| + 2C\|f\|_1 2\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że na mocy lematu, pierwszy składnik ostatniej sumy dąży do 0 przy $n \rightarrow \infty$ \square

Przypomnijmy, że $T^*f(x) = \sup_\varepsilon |T_\varepsilon f(x)|$. Udowodnimy, że

$$T^*f(x) \leq L^*f(x)$$

Istotnie jeśli $T^*f(x) > \lambda$, to istnieje ε , że $|T_\varepsilon f(x)| > \lambda$. Czyli

$$\left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y) dy \right| > \lambda.$$

Daje, to

$$\left| \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f_n(y) dy \right| > \lambda$$

dla n dostatecznie dużych, czyli $L^*f(x) > \lambda$.

5.45. **Wniosek.** T^* jest słabego typu (1,1).

5.46. **Wniosek.** $L^* = T^*$.

D o w ó d . Operator $|L^* - T^*|$ jest słabego typu (1.1) i na zbiorze C_c^∞ , który jest gęsty w L^1 jest równy zero.

Zadanie 5.9. Dokończenie dowodu jest zadaniem. \square

Zadanie 5.10. Pokazać, n.p. śledząc dowód słabego typu (1,1), że T^* jest mocnego typu (p,p) .

6. TWIERDZENIE MNOŻNIKOWE HÖRMANDERA

6.1. Wstępne szacowania. Mówimy, że funkcja g należy do przestrzeni Sobolewa $H_p(\mathbb{R}^n)$, gdy

$$\|g\|_{H_p}^2 = \int |\hat{g}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2p} d\xi < \infty.$$

Oznaczmy przez $J = \{x \in \mathbb{R} : 1/2 \leq |x| \leq 2\}$.

6.1. Lemat. Załóżmy, że $m_0 \in H_{1/2+\varepsilon}$, $\text{supp } m \subset J$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, $C > 0$, że

$$\int |\hat{m}_0(x)|(1 + |x|)^\delta dx \leq C \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}$$

D o w ó d. Oczywiście $m \in C^\infty(\mathbb{R})$ jako transformata Fouriera dystrybucji o nośniku zwartym. Stosując nierówność Höldera mamy

$$\begin{aligned} (6.2) \quad \int |\hat{m}_0(x)|(1 + |x|)^\delta &= \int |\hat{m}_0(x)|(1 + |x|)^{1/2+\varepsilon} (1 + |x|)^{-1/2-\varepsilon+\delta} \\ &\leq \left(\int |\hat{m}_0(x)|^2 (1 + |x|)^{1+2\varepsilon} dx \right)^{1/2} \left(\int (1 + |x|)^{-1-2\varepsilon+2\delta} dx \right)^{1/2} \\ &= C \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

□

Zadanie 6.1. Udowodnij, że jeśli $g \in H_s$, $s > n/2$, to g jest funkcją ciągłą.

6.3. Lemat. Przy założeniach poprzedniego lematu pochodna funkcji \hat{m}_0 spełnia

$$\int |\hat{m}'_0(x)|(1 + |x|)^\delta dx \leq C' \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}$$

D o w ó d. Zauważmy, że

$$\hat{m}'_0(x) = C \int \xi m(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi = C \int (\xi \psi_0(\xi) m(\xi)) e^{-2\pi i x \xi} d\xi,$$

gdzie $\psi_0 \in C_c^\infty$, $\psi = 1$ na J .

Niech $\psi(\xi) = \xi \psi_0(\xi)$. Zatem $\hat{m}'_0(x) = \hat{\psi} * \hat{m}_0(x)$. Łatwo sprawdzić teraz, że

$$\int |\hat{\psi} * \hat{m}_0(x)|(1 + |x|)^\delta dx \leq C \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}.$$

□

6.4. **Lemat.** *Przy założeniach poprzednich lematów istnieje stała $C > 0$, że*

$$\int |\hat{m}_0(x+y) - \hat{m}_0(x)| dx \leq C|y| \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}.$$

D o w ó d . Niech $c = \operatorname{sgn} y$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \int |\hat{m}_0(x+y) - \hat{m}_0(x)| dx &= \int \left| \int_0^{|y|} \hat{m}'_0(x+ct) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^{|y|} \int |\hat{m}'_0(x+t)| dx dt \\ &\leq C|y| \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności zastosowaliśmy poprzedni lemat. \square

6.2. Twierdzenie mnożnikowe Hörmandera.

6.6. **Twierdzenie.** *Niech m będzie funkcją ograniczoną na \mathbb{R}^n taką, istnieje $\varepsilon > 0$ że dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(J)$, $J = \{x : 1/2 \leq |x| \leq 2\}$ istnieje C i dla każdego $t > 0$ mamy*

$$\|\varphi(\xi)m(t\xi)\|_{H_{n/2+\varepsilon}} \leq C.$$

Wówczas $T_m f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)m(\xi))(x)$ jest operatorem ograniczonym na L^p , $1 < p < \infty$, i słabego typu (1.1).

D o w ó d . Przeprowadzimy w przypadku $n = 1$. Niech $\varphi \in C_c^\infty(J)$, będzie taka, że $\sum_j \varphi(2^j \xi) = 1$ dla $\xi \neq 0$. Oznaczmy $m_j(\xi) = m(\xi)\varphi(2^j \xi)$, $n_j(\xi) = m_j(2^{-j} \xi)$. Wówczas na mocy lematów istnieje stała C niezależna od j , że

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{F}^{-1}n_j(\xi)(x)|(1+|x|)^\delta dx &\leq C, \\ \int |\mathcal{F}^{-1}n_j(x+y) - \mathcal{F}^{-1}n_j(x)| dx &\leq C|y|. \end{aligned}$$

Mamy

$$Tf(x) = \sum_j f * \eta_j(x),$$

gdzie $\eta_j(x) = \mathcal{F}^{-1}m_j(x)$. Ponadto $\eta_j(x) = 2^{-j}\zeta_j(2^{-j}x)$, gdzie $\zeta_j(x) = \mathcal{F}^{-1}n_j(x)$.

Zauważmy, że T_m jest ograniczony na L^2 . Wystarczy więc udowodnić, stosując powyższe nierówności, że

$$K(x) = \sum_j 2^{-j}\zeta(2^{-j}x)$$

spełnia

$$\begin{aligned} \int_{a < |x| < 2a} |K(x)| dx &\leq A, \\ \int_{|x| > 2|y|} |K(x+y) - K(x)| dx &\leq B. \end{aligned}$$

Aby udowodnić pierwszą nierówność rozbijamy sumę na dwie: $\sum_{j \geq \log a}$ i $\sum_{j < \log a}$. Do pierwszej stosujemy fakt, że całkujemy po zbiorze o mierze porównywalnej z a funkcje, które są ograniczone przez 2^{-j} . Do drugiej sumy stosujemy fakt, że funkcje całkują pewną wagę.

Aby udowodnić całkowity warunek Höldera rozbijamy sumę na: $\sum_{j \leq \log |y|}$ i $\sum_{j > \log |y|}$. Do pierwszej stosujemy całkowanie wagi a do drugiej udowodniony wcześniej warunek Höldera dla funkcji ζ_j . Szczegóły są ćwiczeniem dla czytelnika. \square