[1]

WSTĘP DO ANALIZY RZECZYWISTEJ I CAŁEK SINGULARNYCH

JACEK DZIUBAŃSKI

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Wrocław 2007.

[1]Skrypt do wykładu prowadzonego w semestrze letnim roku akademickiego 2006/07. Jedynie do użytku wewnętrznego.

1. Transformacja Fouriera w $\mathbb{R}^n$

1.1. **Transformata Fouriera.** Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy jej transformacje Fouriera wzorem

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx. \tag{1.1}$$

Mamy następujące proste do udowodnienia wzory:

$$(\alpha f + \beta g)\widehat{\ } = \alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}, \tag{1.2}$$

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_{L^1} \ \text{ i } \widehat{f} \text{ jest funkcją ciągłą}, \tag{1.3}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0, \quad \text{Riemann-Lebesgue}, \tag{1.4}$$

$$(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\widehat{g}, \ \text{ gdzie } \ f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy, \tag{1.5}$$

$$(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\cdot\xi}, \ (fe^{2\pi i h\cdot x})\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi - h), \ \text{ gdzie } \tau_h f(x) = f(x+h), \tag{1.6}$$

$$[f(A\,\cdot)]\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(A\xi), \ \text{ dla odwzorowania ortogonalnego } \ A \in O(n), \tag{1.7}$$

$$\text{jeśli } g(x) = \lambda^{-n}f(\lambda^{-1}x), \ \text{to } \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi), \ \ \lambda > 0, \tag{1.8}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}f\Big)\widehat{\ }(\xi) = 2\pi i\xi_j\widehat{f}(\xi), \tag{1.9}$$

przy założeniu, f, $\partial_j f \in L^1$

$$(-2\pi i x_j f)\widehat{\ }(\xi) = \partial_j\widehat{f}(\xi). \tag{1.10}$$

przy założeniu, f, $x_j f \in L^1$.

1.2. **Klasa Schwartza i dystrybucje temperowane.** Klasę Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tworzą funkcje f klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n$ spełniające

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = p_{\alpha,\beta}(f) < \infty. \tag{1.11}$$

Wielkości $p_{\alpha,\beta}$ nazywamy półnormami.

Zadanie 1.1. Klasa Schwartza jest przestrzenią Frécheta (metryzowaną i zupełna).

Ciąg funkcji f_m zbiega do f w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{\alpha,\beta}(f_m - f) \to 0$ dla wszystkich wielowskaźników $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Zadanie 1.2. Klasa Schwartza jest przestrzenią gęstą w $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 \le p < \infty$.

Definicja. Dystrybucją temperowną nazywamy każdy funkcjonał liniowy ciągły na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń liniową dystrybucji temperowanych oznaczamy przez $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ciąg dystrybucji $T_n \in \mathcal{S}'$ zbiega do dystrybucji T w $\mathcal{S}'$, gdy $\langle T_n, f\rangle \to \langle T, f\rangle$ dla każdego $f \in \mathcal{S}$.

Zadanie 1.3. Jeśli $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, to $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.
Wskazówka: Udowodnij, że dla $n = 1$ funkcje f i $\widehat{f}$ spełniają to samo równanie różniczkowe zwyczajne

$$u' + 2\pi x u = 0, \quad u(0) = 1.$$

1.12. **Twierdzenie.** *Transformata Fouriera odwzorowuje w sposób ciągły $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ wzajemnie jednoznacznie i "na". Ponadto*

$$\int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g \tag{1.13}$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \tag{1.14}$$

D o w ó d. Mamy $\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) = C(D^\alpha x^\beta f)\widehat{\ }(\xi)$. Zatem

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| \le C\|(D^\alpha x^\beta f)\|_{L^1} \le \sum_{|\alpha'|,|\beta'|<M} p_{\alpha',\beta'}(f),$$

co implikuje ciągłość. Wzór (1.13) wynika z twierdzenia Fubiniego. Dalej

$$\int f(x)\widehat{g}(\lambda x)\, dx = \int \widehat{f}(x)\lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x)\, dx.$$

czyli

$$\int f(x)\lambda^n\widehat{g}(\lambda x)\, dx = \int \widehat{f}(x) g(\lambda^{-1}x)\, dx.$$

Podstawiając $g(x) = \exp^{-\pi|x|^2}$ i przechodząc z $\lambda \to \infty$ mamy

$$f(0)\int e^{-\pi|x|^2}\, dx = \int \widehat{f}(x)\, dx \quad \text{czyli } f(0) = \int \widehat{f}.$$

Stosując (1.6) dostajemy

$$f(x) = (\tau_x f)(x) = \int (\tau_x f)\widehat{\ }(\xi)\, d\xi = \int \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

□

Kładąc $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ mamy $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \widetilde{f}$. Co implikuje $\mathcal{F}^4 f = f$.
Definicja. Transformatą Fouriera dystrybucji temperowanej $T \in \mathcal{S}'$ nazywamy dystrybucje temperowaną $\widehat{T}$ zadaną wzorem

$$\langle \widehat{T}, f\rangle = \langle T, \widehat{f}\rangle.$$

Podobnie definiujemy

$$\langle \widetilde{T}, f\rangle = \langle T, \widetilde{f}\rangle.$$

Zadanie 1.4. Transformata Fouriera jest odwzorowaniem ciągłą bijekcją $\mathcal{S}'$ na $\mathcal{S}'$. Ponadto $((\widehat{T})\widehat{\ })\widehat{\ } = T$.

Ponieważ każda funkcja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, jest dystrybucją temperowaną,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int fg,$$

trnsformata Fouriera takiej funkcji ma sens dystrybucyjny. W przypadku funkcji $f \in L^1$ definiując $\langle T, \varphi \rangle = \int f\varphi$ mamy

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \int f\widehat{\varphi} = \int \widehat{f}\varphi$$

tak więc dystrybucyjna transformata Fouriera funkcji z L^1 pokrywa się z klasyczną.

Dalej każda funkcja $f \in L^p$ jest lokalnie w L^1 oraz $f_R = f\chi_{B(0,R)} \to f$ w $\mathcal{S}'$ gdy $R \to \infty$. Zatem

$$\widehat{f} = \lim_{R\to\infty} \mathcal{F}(f_R)$$

1.3. **Transformacja Fouriera na L^p, $1 \le p \le 2$.**

1.15. **Twierdzenie.** *Transformacja Fouriera $\mathcal{F}$ jest izometria z L^2 na L^2. Ponadto,*

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx \quad \text{zbieżność w} \quad L^2$$

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \quad \text{zbieżność w} \quad L^2.$$

D o w ó d. Dla $f, h \in \mathcal{S}$ niech $\overline{g} = \widehat{h}$, czyli $\widehat{g} = \overline{h}$. Mamy

$$\int f\overline{h} = \int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g = \int \widehat{f}\overline{\widehat{h}}$$

co daje że $\mathcal{F}$ jest izometrią na $L^2 \cap \mathcal{S}$. Dalej jest także L^2-izometrią na $L^1 \cap L^2$. Wyliczenie dystrybucyjnej transformaty Fouriera $\widehat{f}$ dla $f \in L^2$ można teraz zrobić poprzez gęstość. Istotnie $f_R = f\chi_{B(0,R)} \to f$ w L^2, więc także zbieżność w $\mathcal{S}'$. Zatem $\widehat{f_R} \to \widehat{f}$ w $\mathcal{S}'$. Ponadto z izometrii $\widehat{f_R}$ tworzą ciąg Chauchy'ego w L^2 zbieżny do funkcji $F \in L^2$. Oczywiście $\widehat{f}$ (w sensie dystrybucyjnym) $= F$ i $\|F\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. $\square$

Jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, to $f = f_1 + f_2$, gdzie $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^2$ (np. $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|.1\}}$). Wówczas $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$. Czy możemy powiedzieć coś więcej o $\widehat{f}$?

1.16. **Twierdzenie** (interpolacyjne Riesza-Thorina). . *Niech* $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$. *Dla* $0 < \theta < 1$ *niech*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Jeśli T jest operatorem liniowym z $L^{p_0} + L^{p_1}$ do $L^{q_0} + L^{q_1}$ takim, że

$$\|Tf\|_{q_0} \le M_0\|f\|_{p_0} \;\; dla \;\; f \in L^{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \le M_1\|f\|_{p_1} \;\; dla \;\; f \in L^{p_1},$$

to

$$\|Tf\|_q \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_p \;\; dla \;\; f \in L^p.$$

1.17. **Wniosek** (Nierówność Hausdorffa-Younga). *Jeśli* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$, *to*

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \le \|f\|_{L^p},$$

gdzie $p + p' = pp'$.

D o w ó d. Mamy $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_{L^1}$, $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Zatem wymagana nierówność wynika z twierdzenia interpolacyjnego Riesza-Thorina. $\square$

1.18. **Wniosek** (Nierówność Younga). *Jeśli* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *to* $f*g \in L^r$, *gdzie* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ *i*

$$\|f * g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

D o w ó d. Zauważmy, że $\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$ i $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$ i stosujemy twierdzenie interpolacyjne dla operatora $Tg = f * g$. $\square$

Zadanie 1.5. Niech $g(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Udowodnij, że

$$\widehat{g}(x) = \Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}.$$

2. Funkcja maksymalna Hardy'ego Littlewooda

2.1. **Jedność aproksymatywna.** Niech $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ będzie taka że $\int \varphi = 1$. Oznaczmy

$$\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(t^{-1}x).$$

Wówczas $\varphi \to \delta_0$ w $\mathcal{S}'$, przy $t \to 0$. Istotnie, niech $f \in \mathcal{S}$

$$\int \varphi(x)f(x)\,dx = \int \varphi(x)g(tx)\,dx \to f(0).$$

Tak określoną rodzinę funkcji nazywamy jednością aproksymatywną.

2.1. **Twierdzenie.** *Niech φ_t będzie jednością aproksymatywną. Wówczas*

$$\| \lim_{t\to 0} f * \varphi - f\|_{L^p} = 0$$

dla $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Jeśli f jest jednostajnie ciągła i ograniczona, to zbieżność jest także w normie L^∞.

D o w ó d .

$$f * \varphi_t(x) - f(x) \int [f(x-ty) - f(x)]\varphi(y)\,dy.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie takie, że $\|f(x-h) - f(x)\|_{L^p(dx)} \leq \varepsilon(2\|\varphi\|_{L^1})^{-1}$ dla $|h| < \delta$. Jeśli t jest dostatecznie małe mamy

$$\int_{|y|>\delta/t} |\varphi(y)|\,dy < \varepsilon(4\|f\|_{L^p})^{-1}.$$

Stosując nierówność Minkowskiego mamy

$$\|f * \varphi_t - f\|_{L^p} \leq \int_{|y|\leq\delta/t} |\varphi(y)|\|\tau_{ty}f - f\|_{L^p} + 2\|f\|_{L^p}\int_{|y|>\delta/t} |\varphi(y)|\,dy < \varepsilon.$$

Dowód w przypadku funkcji L^∞ i funkcji f jednostajnie ciągłej i ograniczonej jest ćwiczeniem. $\square$

2.2. **Słaby typ i zbieżność punktowa.** Niech (X,μ) i (Y,ν) będą przestrzeniami z miarą. Niech T będzie operatorem podliniowym z $L^p(X)$ w przestrzeń funkcji mierzalnych na Y, to znaczy,

$$|T(\alpha f)(y)| = |\alpha||Tf(y)|, \quad |T(f+g)(y)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|.$$

Definicja. Mówimy, że T jest słabego typu (p,q), $1 \leq q < \infty$, gdy dla pewnego $C \geq 0$ mamy

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \Big(\frac{C\|f\|_{L^p(X)}}{\lambda}\Big)^q \quad \text{dla } \lambda > 0.$$

Mówimy, że T jest mocnego typu (p,q), gdy T jest ograniczony z $L^p(X)$ do $L^q(Y)$. Mówimy, że T jest słabego typu (p,∞), gdy T jest ograniczony z $L^p(X)$ do $L^\infty(Y)$ czyli mocnego typu.

2.2. **Lemat.** *Każdy operator mocnego typu (p,q) jest słabego typu (p,q).*

Dowód. Niech $E_\lambda = \{y \in Y: \ |Tf(y)| > \lambda\}$. Wówczas

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \le \int_{E_\lambda} \Big|\frac{Tf(y)}{\lambda}\Big|^q d\nu(y) \le \frac{1}{\lambda}\|Tf\|_{L^p}^q \le \Big(\frac{\|T\|_{p\to q}\|f\|_{L^p}}{\lambda}\Big)^q.$$

□

2.3. **Twierdzenie.** *Niech T_t będzie rodziną operatorów liniowych na $L^p(X,\mu)$ o wartościach w funkcjach mierzalnych (X,μ) taką, że operator maksymalny T^* związany z tą rodziną*

$$T^*f(x) = \sup_t |T_tf(x)|.$$

jest słabego typu (p,q). Wówczas

$$J = \{f \in L^p(X) : \lim_{t\to t_0} T_tf(x) = f(x) \text{ prawie wszędzie}\}$$

jest domknięty w $L^p(X)$.

Dowód. Niech $f_n \in J$, $f_n \to f$ w L^p. Dla $\lambda > 0$ mamy

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X: \ \limsup_{t\to t_0} |T_tf(x) - f(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X: \ \limsup_{t\to t_0} |T_t(f-f_n)(x) - (f-f_n)(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X: \ T^*(f-f_n)(x) > \lambda/2\}) + \mu(\{x \in X: \ |(f-f_n)(x)| > \lambda/2\}) \\
&\le \Big(\frac{2C\|f-f_n\|_{L^p}}{\lambda}\Big)^q + \Big(2\frac{\|f-f_n\|}{\lambda}\Big)^p \to 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Zatem zbiór punktów dla których $T_nf(x)$ nie zbiega do $f(x)$ jest miary zero. □

2.3. **Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza.** Niech (X,μ) będzie przestrzenią z miarą, $f: X \to \mathbb{C}$ funkcja mierzalną. Niech $a_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ będzie zadana wzorem

$$a_f(\lambda) = \mu(\{x \in X: \ |f(x)| > \lambda\}).$$

Zadanie 2.1. Niech $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\varphi(0) = 0$. Wówczas

$$\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(\lambda) a_f(\lambda)\, d\lambda.$$

Wskazówka: rozważ całkę

$$\int_X \int_0^{|f(x)|} \varphi'(\lambda)\, d\lambda d\mu(x)$$

i zamień kolejność całkowania.

Stosując zadanie do $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ mamy

$$\|f\|_{L^p}^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda)\, d\lambda.$$

2.5. **Twierdzenie** (interpolacyjne Marcinkiewicza). *Niech* (X,μ), (Y,ν) *będą przestrzeniami mierzalnymi,* $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, T *operatorem podliniowym zdefiniowanym z* $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ *do przestrzeni funkcji mierzalnych na* Y, *który jest słabego typu* (p_0,p_0) *i* (p_1,p_1). *Wówczas* T *jest mocnego typu* (p,p) *dla* $p_0 < p < p_1$.

Dowód. Dla $f \in L^p$ i $\lambda > 0$ rozkładamy $f = f_0 + f_1$, $f_0 = f\chi_{\{x\in X:|f(x)|>c\lambda\}}$, $f_1 = f\chi_{\{x\in X:|f(x)|\le\lambda\}}$. Wówczas $f_0 \in L^{p_0}$, $f_1 \in L^p_1$. Ponadto, $|Tf(y)| \le |Tf_1(y)| + |Tf_2(y)|$, co daje

$$a_{Tf}(\lambda) \le a_{Tf_0}(\lambda/2) + a_{Tf_0}(\lambda/2).$$

Przypadek 1; $p_1 = \infty$. Wówczas biorąc $c = (2A_1)^{-1}$, gdzie $A_1 = \|T\|_{\infty\to\infty}$ mamy $a_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$. Ze słabego typu (p_0,p_0) dostajemy

$$a_{Tf_0}(\lambda/2) \le \Big(\frac{2A_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\Big)^{p_0}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{x\in X:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\lambda \\ &= p(2A_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda d\mu(x) \\ &= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Przypadek 2; $p_1 < \infty$. Wówczas

$$a_{Tf_i}(\lambda/2) \le \Big(\frac{2A_i}{\lambda}\|f_0\|_{p_i}\Big)^{p_i}, \quad i = 0,1.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}(2A_0)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\lambda \\ &\quad + p\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1}(2A_1)^{p_1}\int_{\{x:|f(x)|\le c\lambda\}} |f(x)|^{p_1}d\mu(x)d\lambda \\ &= \Big(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0}\frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p}\frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}}\Big)\|f\|_p^p. \end{aligned} \tag{2.7}$$

□

2.4. **Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewooda.** Niech B_r oznacza kulę o środku w 0 i promieniu r, $|B_r|$ jej objętość.

Funkcja maksymalna Hardy'ego-Littlewwoda funkcji lokalnie całkowalnej f na $\mathbb{R}^n$ jest zdefiniowana wzorem

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y)|\,dy = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy. \tag{2.8}$$

Funkcja może przyjmować wartości $+\infty$.

Można także zdefiniować funkcję maksymalną Hardy'ego-Littlewooda względem kostek. Niech $Q_r = [-r, r]^n$ oznacza kostkę w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i długości boku $2r$, jej objętość $|Q_r| = (2r)^n$.

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|\,dy. \tag{2.9}$$

Zadanie 2.2. istnieją stałe $c_n,\ C_n > 0$ takie, że

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x).$$

Oczywiście

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|M'f\|_\infty \leq \|f\|_\infty. \tag{2.10}$$

2.11. **Twierdzenie.** *Funkcja M jest słabego typu $(1,1)$ i mocnego typu (p,p) dla $1 < p \leq \infty$.*

Wystarczy udowodnić słaby typ $(1,1)$ i zastosować (2.10) wraz z twierdzeniem interpolacyjnym Marcinkiewicza.

Udowodnimy najpierw twierdzenie dla $n = 1$. Dowód dla $n > 1$ jest analogiczny.

Zadanie 2.3.Lemat pokryciowy *Niech $\{I\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ będzie rodziną odcinków, K zbiorem zwartym zawartym w $\bigcup_\alpha I_\alpha$. Wówczas istnieje podrodzina przeliczalna (skończona) $\{I_j\}$ taka, że*

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \sum_j \chi_{I_j}(x) \leq 2 \quad \textit{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wskazówka: Jeśli trzy odcinki domknięte mają punkt wspólny, to jeden z nich zawiera się w sumie dwu pozostałych.

D o w ó d . [słabego typu] Niech $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}$. Jeśli $x \in E_\lambda$, to istnieje odcinek I_x o środku w x, że

$$\frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} |f| > \lambda.$$

Niech K zwarty zawarty w E_λ. Wówczas $K \subset \bigcup_{x\in E_\lambda} I_x$. Z lematu pokryciowego istnieje przeliczalna (skończona) podrodzina odcinków I_j, że

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \sum_j \chi_{I_j}(x) \leq 2.$$

Zatem

$$|K| \leq \sum_j |I_j| \leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \sum_j \chi_{I_j} |f| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1.$$

Ponieważ $|E_\lambda| = \sup\{|K| : K \subset E_\lambda,\ K \text{ zwarty}\}$ dowód jest zakończony. □

Zadanie 2.4. Zmodyfikować powyższy dowód na przypadek n-wymiarowy poprzez udowodnienie następującego lematu.

2.12. **Lemat.** *Niech B_α, $\alpha \in \Lambda$ będzie rodziną kul w $\mathbb{R}^n$ pokrywających zbiór zwarty K. Istnieje przeliczalna (skończona) podrodzina rozłącznych kul B_j taka, że*

$$|K| \leq 5^n \sum_j |B_j|.$$

Dla funkcji φ okreslonej na $\mathbb{R}^n$ określmy $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$.

2.13. **Twierdzenie.** *Niech φ będzie funkcją na $\mathbb{R}^n$ całkowalą, nieujemną, radialną, malejącą na $(0, \infty)$. Wówczas*

$$\sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| \leq \|\varphi\|_{L^1} Mf(x).$$

D o w ó d. Załóżmy na początek, że

$$\varphi(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{r_j}}(x), \quad a_j > 0. \tag{2.14}$$

Wówczas

$$|f * \varphi(x)| \leq \sum_j a_j |B_{r_j}| \frac{1}{|B_{r_j}|} |f| * \chi_{B_{r_j}} \leq \sum_j a_j |B_{r_j}| Mf(x) = \|\varphi\|_1 Mf(x).$$

Następnie jeśli φ jest funkcją spełniającą założenia twierdzenia, to można ją aproksymować od góry w L^1 funkcjami postaci (2.14). (To jest **Zadanie 2.5.**). □

2.15. **Wniosek.** *Jeśli $|\varphi(x)| \leq \psi(x)$, gdzie ψ jest funkcją całkowalną nieujemna, radialną, malejącą, to funkcja maksymalna*

$$\sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)|$$

jest ograniczona na L^p dla $1 < p \leq \infty$ i słabego typu (1,1).

2.16. **Wniosek.** *Jeśli φ spełnia założenia powyższego wniosku, to*

$$\lim_{t \to 0} f * \varphi_t(x) = \Big(\int \varphi \Big) f(x)$$

prawie wszędzie dla $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$.

D o w ó d. Założyć, że $\int \varphi = 1$ i zastosować twierdzenie 2.3. Następnie pozbyć się założenia, że $\int \varphi = 1$. □

2.5. **Diadyczna funkcja maksymalna.** Niech $\mathcal{Q}_0$ będzie rodziną kostek w $\mathbb{R}^n$ postaci $\mathbf{a} + [0,1)^n$, gdzie $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ (kostki jednostkowe o bokach równoległych do osi zaczepione "lewym dolnym wierzchołkiem" w punktach całkowitych). Tworzą one rozłączne pokrycie $\mathbb{R}^n$. Dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $\mathcal{Q}_k$ oznacza rodzinę kostek powstałą poprzez przemnożenie $\mathcal{Q}_0$ przez 2^{-k} (są to kostki o bokach o długości 2^-k równoległych do osi o lewym dolnym wierzchołku w punktach $2^{-k}\mathbf{Z}^n$). Oczywiście każdy wierzchołek z kostki z tej rodziny jest ze zbioru $2^{-k}\mathbb{Z}^n$. Kostki z rodzin $\mathcal{Q}_k$ nazywamy diadycznymi. Mamy następujące własności:

(i) dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ każdy $x \in \mathbb{R}^n$ jest w dokładnie jednej kostce z rodziny $\mathcal{Q}_k$;

(ii) dwie kostki diadyczne są albo rozłączne, albo jedna zawarta jest w drugiej;

(iii) dla $j < k$, każda kostka diadyczna z rodziny $\mathcal{Q}_k$ jest zawarta w dokładnie jednej kostce diadycznej z rodziny $\mathcal{Q}_j$;

(iv) każda kostka diadyczna z rodziny $\mathcal{Q}_k$ dzieli się na 2^n kostek diadycznych z rodziny $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \Big) \chi_Q(x).$$

Jest ona stała na $Q \in \mathcal{Q}_k$.

Zadanie 2.3. Mamy następującą własność: Dla Ω będącej sumą pewnych kostek z rodziny $\mathcal{Q}_k$ zachodzi

$$\int_\Omega E_k f = \int_\Omega f.$$

Definiujemy diadyczną funkcje maksymalną M_d wzorem

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

2.17. **Twierdzenie.** *M_d jest słabego typu (1,1). Ponadto*

$$\lim_{k \to \infty} E_k f(x) = f(x).$$

D o w ó d. Niech $f \in L^1$. Możemy przyjąć, że $f \geq 0$. Wówczas

$$\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k, \quad \text{suma rozłączna}$$

$$\Omega_k = \{x : E_k f(x) > \lambda \ \text{ i } \ E_j f(x) \leq \lambda \ \text{ dla } \ j < k\}.$$

Ponieważ E_k jest stała na kostkach z $\mathcal{Q}_k$, Ω jest sumą pewnych kostek z tej rodziny i $|\Omega_k| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f$. Zatem

$$\begin{aligned} |\{x : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} |E_k f| \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Druga cześć twierdzenia wynika z pierwszej i faktu, że $E_k f(x) \to f(x)$ dla $f \in \mathcal{S}$.
$\square$

Powyższy dowód nasuwa następujące twierdzenie (jest to rozkład tak zwany rozkład Calderóna-Zygmunda)

2.19. **Twierdzenie.** *Niech f będzie nieujemną funkcją całkowalną. Wówczas dla każdej liczby $\lambda > 0$ istnieje rodzina Q_j kostek diadycznych, że*

(i) $f(x) \le \lambda$ *dla prawie wszystkich* $\lambda \notin \bigcup_j Q_j$*;*

(ii) $|\bigcup_j Q_j| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$*;*

(iii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \le 2^n\lambda$.

D o w ó d. Dla $\lambda > 0$ mamy $\mathbf{E}_\lambda = \{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup \Omega_k$, suma rozłączna (patrz dowód poprzedniego twierdzenia). Każdy Ω_k jest sumą kostek z $\mathcal{Q}_k$. Zatem $\mathbf{E}_\lambda = \bigcup_j Q_j$, rozłączna suma kostek diadycznych. Jeśli $x \notin \mathbf{E}_\lambda$, to $E_j f(x) \le \lambda$ dla każdego j. Zatem $f(x) \le \lambda$ prawie wszędzie dla $x \notin \mathbf{E}_\lambda$. Punkt (ii) wynika z dowodu poprzedniego twierdzenia. Punkt (iii) też. Istotnie, jeśli Q_j jest jedną z kostek, to Q_j wchodzi w skład dokładnie jednego Ω_k. Ale wtedy dla $x \in Q_j$ $E_k f(x) > \lambda$ i $E_{k-1}f(x) \le \lambda$. Niech $\tilde{Q}_j$ oznacza kostkę z $\mathcal{Q}_{k-1}$ taką, że $Q_j \subset \tilde{Q}_j$ Mamy

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \le \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|}\frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} f \le 2^n\lambda.$$

□

2.6. Dowód słabego typu (1,1) operatora maksymalnego M' z użyciem funkcji maksymalnej diadycznej.

2.20. **Lemat.** *Dla $\lambda > 0$ i funkcji nieujemnej całkowalnej f mamy*

$$|\{x : M'f(x) > 4^n\lambda\}| \le 2^n|\{x : M_d f(x) > \lambda\}|.$$

D o w ó d. Dla $\lambda > 0$ niech Q_j będzie rodziną rozłącznych kostek diadycznych jak w powyższym twierdzeniu. Wtedy $\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup Q_j$. Niech $2Q_j$ oznacza kostkę o tym samym środku i dwa razy większym boku. Let będzie udowodniony, jeśli pokażemy, że

$$\{x : M'f(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

Niech $x \notin \bigcup_j 2Q_j$. I niech Q będzie dowolną kostką o środku w x. Oznaczmy przez l długość boku Q. Niech $k \in \mathbb{Z}$ będzie takie, że $2^{k-1} \le l < 2^k$. Wówczas istnieje co najwyżej 2^n kostek z rodziny $\mathcal{Q}_k$ mającej punkt wspólny z Q. Oznaczmy je przez $R_1, R_2, ..., R_m$, $m \le 2^n$. Pokrywają one oczywiście Q. Zauważmy, kostka Q_j nie może zawierać żadnej kostki R_i. Zatem, dla dowolnych dwu kostek R_i i Q_j są one albo rozłączne, albo $Q_j \subset R_i$. W obu przypadkach $\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \le \lambda$. Mamy więc

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f \le \sum_i^m \frac{1}{|Q|}\int_{Q\cap R_i} f \le \sum_i^m \frac{2^{kn}}{|Q|}\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \le 2^n m\lambda \le 4^n\lambda.$$

□

D o w ó d. [słabego typu dla M'] Wystarczy pokazać dla $f \geq 0$.Z lematu

$$|\{x : M'f(x) > \lambda\}| \leq 2^n |\{x : M_d f(x) > 4^{-n}\lambda\}| \leq \frac{8^n}{\lambda}\|f\|_1.$$

□

Jako wnioski mamy wynikające z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza i twierdzenia o domkniętości.

2.21. **Wniosek.** *Funkcje maksymalna M' i M i M_d są słabych typów (1,1) i mocnych typów (∞, ∞), a zatem mocnych typów (p,p), $1 < p \leq \infty$.*

2.22. **Wniosek** (Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowlaności)**.** *Jeśli $f \in L^p_{loc}$, to*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y)\, dy = f(x) \quad \textit{prawie wszędzie.}$$

2.7. Szacowania wagowe.

2.23. **Twierdzenie.** *Niech w będzie nieujemną funkcją mierzalną na $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$. Wówczas istnieje stała C_p, że*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)\, dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x)\, dx.$$

Ponadto,

$$\int_{\{x : Mf(x) > \lambda\}} w(x) dx \leq C_1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x)\, dx.$$

D o w ó d. Pokażemy, że $\|Mf\|_{L^\infty(w(x)dx)} \leq \|f\|_{L^\infty(Mw(x)dx)}$. Jeśli jeszcze pokażemy drugą część twierdzenia, to pierwsza będzie wynikać z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza

Jeśli $Mw(x) = 0$ dla pewnego x, to $w(x) = 0$ prawie wszędzie i nie ma czego dowodzić. Zatem załóżmy, że $Mw(x) > 0$ dla każdego x. Niech $f \in L^\infty(Mw)$ i niech $a > \|f\|_{L^\infty(Mw)}$. Wówczas

$$\int_{\{x : |f(x)| > a\}} Mw(x) dx = 0,$$

zatem, $|f(x)| \leq a$ prawie wszędzie. Stąd $Mf(x) \leq a$, więc $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq a$, co daje $\|Mf\|_{L^\infty(w)} \leq \|f\|_{L^\infty(Mw)}$

Przejdźmy do dowodu słabego typu. Wystarczy udowodnić dla $f \geq 0$. Załóżmy na początek, że dodatkowo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Niech $\{Q_j\}_j$ będzie rozkładem Calderóna-Zygmunda na poziome λ. Zatem

$$\{x : M'f(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\int_{\{x:M'f(x)>4^n\lambda\}} w(x)dx &\le \sum_j \int_{2Q_j} w(x)\,dx \\
&= \sum_j 2^n|Q_j|\frac{1}{|2Q_j|}\int_{2Q_j} w(x)\,dx \\
&\le \frac{2^n}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} f(y)\Big(\frac{1}{|2Q_j|}\int_{2Q_j} w(x)\,dx\Big)dy \qquad (2.24)\\
&\le \frac{C2^n}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} f(y)M'w(y)\,dy \\
&\le \frac{C2^n}{\lambda}\int f(y)C'Mw(y)\,dy
\end{aligned}
$$

Jeśli $f \notin L^1$, to istnieje ciąg $f_n \in L^1$ $f_n \ge 0$, $f_n(x) \to f(x)$ prawie wszędzie i monotonicznie rosnąco. **Dlaczego taki ciąg istnieje, to jest kolejne Zadanie 2.4.** Wówczas $Mf_n(x) \to Mf(x)$ monotonicznie dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Mamy więc $\{x : Mf(x) > \lambda\} = \bigcup\{x : Mf(x) > \lambda\}$ i zbiory w tej sumie tworzą ciąg monotoniczny na zawieranie. Dalej $\int fMw = \lim_n \int f_nMw$. Stąd twierdzenie wynika z poprzednio udowodnionej nierówności i przejść granicznych. $\square$

Zadanie 2.5. Udowodnij, ze jeśli $f \in L^1$, $f \neq 0$, to $Mf \notin L^1$.

3. Transformata Hilberta.

3.1. **Sprzężone jądro Poissona.** Przypomnijmy, ze jądro Poissona na prostej zadane jest wzorem

$$P_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x}\, d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|})(x).$$

Wówczas dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (choć wzór ma sens dla szerszej klasy funkcji f) mamy

$$\begin{aligned} f * P_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= u(z), \quad z = x + it,\ t > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ponadto mamy

$$\frac{d^2}{dt^2}(f * P_t)(x) = \int (-2\pi|\xi|)^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi \xi x} d\xi,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f * P_t)(x) = \int (2\pi i|\xi|)^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi \xi x} d\xi,$$

co daje, ze u jest funkcją harmoniczną na $\mathbb{R}^2_+ = \{z : \Im z > 0\}$. Zauważmy, że funkcję $u(z)$ możemy zapisać jako

$$u(z) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi}\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi.$$

Zdefiniujmy

$$iv(z) = \int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi}\, d\xi - \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \bar{z} \xi} d\xi.$$

Zadanie 3.1. Wykaż, ze v jest harmoniczna na $\mathbb{R}^2_+$. Ponadto obie funkcje u i v są rzeczywiste jeśli f jest rzeczywistą.

Widzimy, ze $u + iv$ jest funkcją holomorficzna, zatem v jest funkcją sprzężoną do u.

Zauważmy, że

$$v(z) = \int_{-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Powyższy wzór może być zapisany jako

$$v(x,t) = f * Q_t, \quad \widehat{Q}_t(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|}.$$

Jądro $Q_t(x)$ nosi nazwę jądra sprzężonego do P_t.

Zadanie 3.2. Wykazać, że

$$Q_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{t^2 + x^2}.$$

Zadanie 3.3. Wykazać, poprzez wyliczenie, że $P_t(x)$ i $Q_t(x)$ są funkcjami harmonicznymi na górnej półpłaszczyźnie.

Ponadto widzimy, że

$$P_t(x) + iQ_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t+ix}{t^2+x^2} = \frac{i}{\pi z}$$

jest funkcją holomorficzną.

Wiemy, że P_t jest jednością aproksymatywną przy $t \to 0$. Zauważmy, że Q_t nie jest, bo funkcje $Q_t(x)$ jako funkcje zmiennej x nie są całkowalne.

Formalnie

$$\lim_{t\to 0} Q_t(x) = \frac{1}{\pi x}$$

co nie jest lokalnie całkowalną funkcją.

Z drugiej strony rozważmy granicę jąder Q_t w sensie dystrybucyjnym, gdy $t \to 0$, to znaczy,

$$\lim_{t\to 0}\langle Q_t, f\rangle = \lim_{t\to 0}\int Q_t(x)f(x)\,dx = \lim_{t\to 0}\langle \widehat{Q}_t, \mathcal{F}^{-1}f\rangle = \lim_{t\to 0}\int -i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi t|\xi|}\widehat{f}(-\xi)\,d\xi$$

$$= i\int \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Zauważmy, że ostatnia całka jest dobrze zdefiniowaną dystrybucją temperowaną. Ponadto mamy

$$\lim_{t\to 0}\widehat{Q}_t = -i\mathrm{sgn}(\xi)$$

w sensie dystrybucyjnym.

3.2. **Część główna (principal value) $1/x$.** Definiujemy dystrybucję temperowaną zwaną częścią główną $1/x$ wzorem

$$\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Jest to dobrze zdefiniowana dystrybucja temperowana, bo

$$\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, f\rangle = \int_{|x|<1}\frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx + \int_{|x|>1}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

i obie całki są zbieżne.

3.2. **Twierdzenie.** $Q_t \to \frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$ *w* $\mathcal{S}'$ *przy* $t \to 0$..

D o w ó d . Zdefiniujmy $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}\chi_{\{|x|>\varepsilon\}}$. jest to funkcja ograniczona, więc definiuje dystrybucję temperowaną. Ponadto $\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$ w $\mathcal{S}'$. Wystarczy udowodnić, że

$$\lim_{t\to 0}(Q_t - \frac{1}{\pi}\psi_t) = 0$$

w $\mathcal{S}'$. Ustalmy $f \in \mathcal{S}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\langle \pi Q_t - \psi_t, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{xf(x)}{t^2+x^2}\,dx - \int_{|x|>t} \frac{f(x)}{x}\,dx \\
&= \int_{|x|<t} \frac{xf(x)}{t^2+x^2}dx + \int_{|x|>t} \Big(\frac{x}{t^2+x^2} - \frac{1}{x}\Big)\,dx \qquad (3.3)\\
&= \int_{|x|<1} \frac{xf(tx)}{1+x^2}dx - \int_{|x|>1} \frac{f(tx)}{x(1+x^2)}dx.
\end{aligned}$$

Jeśli weźmiemy granice przy $t \to 0$, to widzimy, że z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej obie całki dążą to całek z funkcji całkowalnych nieparzystych po obszarach symetrycznych, a więc do 0. $\square$

3.4. **Wniosek.**

$$\lim_{t\to 0} f * Q_t(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy,$$

Z ciągłości transformacji Fouriera w $\mathcal{S}'$ mamy

3.5. **Wniosek.**

$$\Big(\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\Big)\widehat{\ }(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)$$

3.3. **Transformata Hilberta.** Dla funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiujemy jej transformatę Hilberta $Hf(x)$ jednym z równoważnych wzorów

$$Hf = \lim_{t\to 0} f * Q_t,$$

$$Hf = \frac{1}{\pi} f * \Big(\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\Big),$$

$$(Hf)\widehat{\ }(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Z trzeciego równania wynika:

$$\|Hf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

$$H(Hf) = -f,$$

$$\int (Hf)g = -\int f(Hg).$$

Pozwala to zdefiniować transformatę Hilberta dla funkcji $f \in L^2$.

Zauważmy, że dla $f \in L^2$ mamy

$$Hf(x) \int \frac{1}{\pi}\frac{f(y)}{x-y}\,dy \quad \text{dla} \quad x \notin \ \sup f.$$

3.6. **Twierdzenie.** *Istnieją stałe C_p, $1 \le p < \infty$, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mamy*

$$|\{x : |Hf(x) > \lambda\}| \le C_1\lambda^{-1}\|f\|_{L^1} \quad \text{czyli słaby typ (1,1), (Kołmogorov),}$$

$$\|Hf\|_{L^p} \le C_p\|f\|_{L^p}, \quad 1 < p < \infty, \quad \text{mocny typ } (p,p) \ \text{(Riesz).}$$

D o w ó d . Udowodnimy słaby typ (1,1). Niech $f \in \mathcal{S}$. Dokonajmy rozkładu C-Z funkcji $|f|$ na poziomie $\lambda > 0$, to jest, istnieje ciąg rozłącznych odcinków I_j, że

$$|f(x)| \leq \lambda \ \text{ dla } \ x \notin \Omega = \bigcup_j I_j,$$

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1},$$

$$\lambda < \frac{1}{\lambda}\int_{I_j} |f| \leq 2\lambda.$$

Mając takie odcinki rozkładamy funkcję f na sumę funkcji g i b, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } \ x \notin \Omega, \\ \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f & \text{dla } \ x \in I_j \end{cases} \tag{3.7}$$

$$b(x) = \sum_j b_j(x),$$

gdzie

$$b_j(x) = \Big(f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f\Big)\chi_{I_j}(x).$$

Mamy $|g(x)| \leq 2\lambda$, b_j ma nośnik w I_j i całkę zero. Ponadto $f, g \in L^2$. Zatem $Hf = Hg + Hb$ i w konsekwencji

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |Hg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : |Hb(x)| > \lambda/2\}|.$$

Stosując izometrię H na L^2 mamy

$$\begin{aligned} |\{x : |Hg(x)| > \lambda/2\}| &\leq 4\lambda^{-2}\int |g(x)|^2\,dx \\ &\leq 8\lambda^{-1}\int |g(x)|\,dx \\ &\leq 8\lambda^{-1}\int |f(x)|\,dx \end{aligned} \tag{3.8}$$

Niech $\Omega^* = \bigcup_j 2I_j$. Mamy $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$ i

$$\begin{aligned} |\{x : |Hb(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq 2\lambda^{-1}\|f\|_{L^1} + 2\lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb(x)|\,dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

zauważmy, że jeśli $x \notin \Omega^*$, to $x \notin \operatorname{supp} b \subset \Omega$. Zatem dla $x \notin \Omega^*$ mamy

$$Hb(x) = \sum_j Hb_j(x) = \sum_j \int \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy.$$

Oznaczmy przez c_j środek I_j. Wówczas dla $x \notin 2I_j$, $y \in I_j$ mamy $2r < |x - c_j| \leq |x-y| + |y-c_j| \leq |x-y| + r$. Stąd $r < |x-y|$ i w konsekwencji

$$|x - c_j| < 2|x-y|, \quad |x-y| \leq |x-c_j| + |c_j - y| \leq 2|x-c_j|. \tag{3.10}$$

Funkcje b_j mają całkę zero, więc

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \Big| \int b_j(y)\Big(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\Big)dy\Big| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \int_{I_j} |b_j(y)| \frac{|y-c_j|}{|x-y||x-c_j|} dy\,dx \\
&\leq \int_{I_j} \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |b_j(y)| \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2} dx\,dy \\
&\leq 2\|b_j\|_{L^1}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

W konsekwencji

$$
\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j| \leq 2\sum_j \int_{I_j} |b_j(y)|\,dy \leq 4\|f\|_{L^1}.
$$

Dowód słabego typu (1,1) jest zakończony stosując nierówność Czebyszewa i w powiązaniu z ostatnią nierównością. Stosując modyfikację dowodu twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza, mamy że dla $1 < p \leq 2$ zachodzi

$$
\|Hf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).
$$

Jeśli teraz $f \in \mathcal{S}$, $2 < p < \infty$, to

$$
\begin{aligned}
\|Hf\|_p &= \sup_{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|g\|_{p'}\leq 1} \Big\{\Big| \int_{\mathbb{R}} Hf \cdot g \Big|\Big\} \\
&= \sup_{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|g\|_{p'}\leq 1} \Big\{\Big| \int_{\mathbb{R}} f \cdot Hg \Big|\Big\} \\
&\leq \|f\|_p \|Hg\|_{p'} \leq C\|f\|_p\|g\|_{p'}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

□

3.4. **Transformaty obcięte - zbieżność punktowa.** Przypomnijmy, że dla $f \in \mathcal{S}$ udowodniliśmy, że $\|Hf\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p}$, $1 < p < \infty$, i $|\{x : |Hf(x) > \lambda\}| \leq C_1\lambda^{-1}\|f\|_{L^1}$, gdzie

$$
Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy, \quad f \in \mathcal{S}.
$$

Pozwoliło to zdefiniować Hf dla $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ jako ograniczony operator. Ponadto dla $f \in L^1$ możemy zdefiniować Hf jako funkcję mierzalną w sposób następujący. Niech $f_n \in \mathcal{S}$, $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$. Wówczas

$$
|\{x : |Hf_n(x) - Hf_m(x)| > \lambda\}| \leq C_1\lambda^{-1}\|f_n - f_m\|_{L^1}.
$$

Zadanie 3.4. Udowodnij, że powyższa nierówność implikuje, że $\lim_{n\to\infty} Hf_n(x)$ zbiega według miary do funkcji mierzalnej.

Zatem mamy dobrze zdefiniowaną funkcję mierzalną Hf dla $f \in L^1$.

Zdefiniujmy operator obcięty H_ε transformcji Hilberta wzorem,

$$
H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy
$$

i odpowiadający tej rodzinie operator maksymalny

$$H^*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f(x)|.$$

3.13. **Twierdzenie.** *Istnieje stała* C_p, $1 \le p < \infty$, *że*

$$\|H_\varepsilon f\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty$$

$$|\{x : |H_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| \le C_1 \lambda^{-1} \|f\|_p.$$

Dowód. Zauważmy, że dla funkcji ψ_ε zdefiniowane w sekcji 3.2 mamy

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\varepsilon|y|<N} \frac{e^{-2\pi i y\xi}}{y}\, y \\ &= -2i\operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt \end{aligned} \tag{3.14}$$

co jest jednostajnie ograniczone. Stąd H_ε mają wspólnie ograniczone normy jako operatory na L^2. Dalej postępujemy jak w dowodzie słabego typu (1.1) dla transformacji Hilberta i uzyskujemy, że operatory H_ε mają wspólnie ograniczone normy słabego typu (1.1). Przedstawimy tutaj jedynie jeden etap rozumowania szacującego $H_\varepsilon b(x)$ dla $x \notin \Omega^*$.

Niech $x \notin \Omega^*$. Ustalmy b_j. Mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \le \int |b_j(y)| \Big| \frac{1}{x-y} \chi_{B_\varepsilon^c}(x-y) - \frac{1}{x-c_j} \chi_{B_\varepsilon^c}(x-c_j) \Big| dy.$$

Mamy następujące możliwości.

(i) Dla każdego $y \in I_j$ zachodzi $|x-y| > \varepsilon$. Wtedy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \le C \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2} \|b_j\|_{L^1}.$$

(ii) Dla każdego $y \in I_j$ zachodzi $|x-y| \le \varepsilon$. Wtedy $H_\varepsilon b_j(x) = 0$.

(iii) Istnieją $y', y'' \in I_j$, że $|x-y'| < \varepsilon < |y''-x|$. Wtedy

(1) $r_j < \varepsilon$

(2) $I_j \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$

(3) $\varepsilon < 3|x-y|$ dla każdego $y \in I_j$.

Istotnie $2r_j < |c_j - x| \le |c_j - y'| + |y' - x| \le r_j + \varepsilon$ co daje (1). Aby sprawdzić (2) zauważmy, że dla $y \in I_j$ mamy $|y-x| \le |y-y'| + |y'-x| < 2r_j + \varepsilon \le 3\varepsilon$. Przejdźmy do dowodu (3). Mamy $\varepsilon < |x-y''| \le |x-y| + |y-y''| \le |x-y| + 2r_j \le |x-y| + 2|x-y|$. Zauważmy, ze w dowodzie (1) i (2) korzystaliśmy tylko z tego, że $|y'-x| < \varepsilon$.

Wróćmy do szacowania $H_\varepsilon b_j$. Mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \le C \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| \frac{1}{|x-c_j|} dy \le C' \frac{1}{6\varepsilon} \int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| dy.$$

Ostatecznie $|H_\varepsilon b(x)| \le C \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|} \|b_j\|_{L^1} + |b| * h_\varepsilon$, gdzie $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{6\varepsilon}\chi_{(-3\varepsilon,3\varepsilon)}(x) \in L^1$. Ostatni operator jest ograniczony na L^1 z normą niezależną od ε. Zatem słaby typ (1,1) i niezależność stałej w słabym typie jest udowodniona poprzez powtórzenie fragmentu dowodu twierdzenia o słabym typie transformacji Hilberta.

Stąd i z twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza, mamy istnienie stałych C_p, $1 < p < 2$. Dla $p > 2$ istnienie stałych wynika z dualności. □

Zadanie 3.5. udowodnij, że $H_\varepsilon f \to Hf$ w normie L^p.

Zajmiemy się teraz zbieżnością prawie wszędzie $H_\varepsilon f$.

3.15. **Twierdzenie.** *Dla funkcji $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, mamy*

$$H^* f(x) \le M(Hf)(x) + CMf(x).$$

Dowód. Niech $\varphi \in C_c^\infty(-1,1)$ będzie funkcją symetryczną, dodatnią, malejącą na $(0,\infty)$ o całce 1. Wówczas

$$\frac{1}{y}\chi_{\{y:|y|>\varepsilon\}} = \Big(\text{p.v.}\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\Big)(y) + \Big[\frac{1}{y}\chi_{\{y:|y|>\varepsilon\}} - \Big(\text{p.v.}\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\Big)(y)\Big]$$

Niech

$$k_\varepsilon(y) = \Big[\frac{1}{y}\chi_{\{y:|y|>\varepsilon\}} - \Big(\text{p.v.}\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\Big)(y)\Big]$$

Dla $|y| > 2\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} |k_\varepsilon(y)| &\le \Big| \int_{|x|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-x}\Big)dx\Big| \\ &\le \int_{|x|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\frac{|x|}{|y||y-x|}dx \\ &\le C\frac{\varepsilon}{|y|^2}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Z drugiej strony, dla $|y| \le 2\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} |k_\varepsilon(y)| &\le \frac{C}{\varepsilon} + \Big|\lim_{t\to 0}\int_{3\varepsilon>|x|>t} \frac{\varphi_\varepsilon(y-x) - \varphi_\varepsilon(y)}{x}dx\Big| \\ &\le C\int \frac{1}{\varepsilon}\Big|\frac{\varphi(y/\varepsilon - x/\varepsilon) - \phi(y/\varepsilon)}{x}\Big|dx \\ &= C\int \frac{1}{\varepsilon}\Big|\frac{\varphi(y/\varepsilon - x) - \phi(y/\varepsilon)}{x}\Big|dx \\ &\le \frac{C}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Zatem $|k_\varepsilon(y)| \le \psi_\varepsilon(y)$, gdzie $\psi(y) = \frac{C}{1+y^2}$.

Ponadto dla $f \in \mathcal{S}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f * (\text{p.v.}\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon)(x) = (f * \text{p.v.}\frac{1}{x}) * \varphi_\varepsilon(x)$$

Zauważmy, ze powyższe sploty są funkcjami ciągłymi x. Zatem dla $f \in \mathcal{S}$ i $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f * (H\varphi_\varepsilon)(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x)$$

(Sugeruję przeanalizować czytelnikowi powyższą równość). Wzór ten przedłuża się na $f \in L^p$ poprzez zastosowanie przejścia granicznego i nierówności Höldera. Zatem mamy dla $f \in L^p$, $1 < p < \infty$,

$$f * (H\varphi_\varepsilon)(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x)$$

i powyższa funkcja jest funkcją ciągłą x.

Mamy więc

$$H_\varepsilon f(x) = (Hf) * \varphi_\varepsilon(x) + f * k_\varepsilon(x)$$

co w powiązaniu z wyprowadzonymi szacowaniami i twierdzeniem o radialnej majorancie daje twierdzenie. □

3.18. **Wniosek.** *Operator H^* jest mocnego typu (p,p) dla $1 < p < \infty$ i dla $f \in L^p$ $H_\varepsilon f \to Hf$ w normie L^p i prawie wszędzie.*

D o w ó d. Dla $f \in L^p$ niech $f_n \in \mathcal{S}$, $f_n \to f$ w L^p. Mamy

$$\|H_\varepsilon f - H_f\|_p \leq \|H_\varepsilon(f - f_n)\|_p + \|H_\varepsilon f_n - Hf_n\|_p + \|Hf_n - Hf\|_p.$$

Pozostaje wykazać, że $\|H_\varepsilon f_n - Hf_n\|_p \to 0$ przy ustalonym f_n. Ale $H_\varepsilon f_n$ mają wspólną majorantę w L^p. Dla zbieżności prawie wszędzie rozważmy rodzinę operatorów $T_\varepsilon = H_\varepsilon - H + I$ i zastosować twierdzenie z rozdziału 2.2. □

3.19. **Twierdzenie.** *Operator H^* jest słabego typu (1,1).*

D o w ó d. Dla $f \in L^1$ niech I_j będą odcinkami z rozkładu C-Z na poziomie $\lambda > 0$. Piszemy

$$f = g + b = g \sum_j b_j$$

Wiemy, że H^* jest mocnego typu (2,2), więc

$$|\{x : |H^* g(x)| \leq \lambda/2\}| \leq C\|g\|^2_{L^2}\lambda^{-2} \leq C\|f\|_{L^1}\lambda^{-1}.$$

Wystarczy udowodnić,

$$|\{x \notin \Omega^* : H^* b(x) > \lambda/2\}| \leq C\lambda^{-1}\|b\|_{L^1}.$$

Ustalmy $x \notin \Omega^*$, $\varepsilon > 0$ i I_j. Wówczas zachodzi jedna z możliwości

1) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I_j = I_j$,
2) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I_j = \emptyset$,
3) $x - \varepsilon \in I_j$ lub $x + \varepsilon \in I_j$.

W pierwszym przypadku $H_\varepsilon b_j(x) = 0$.

W drugim przypadku $H_\varepsilon b_j(x) = Hb_j(x)$. Zatem stosując te same argumenty co przy dowodzie słabego typu (1,1) dla H mamy

$$|H_\varepsilon b_j(x)| \le \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1}.$$

W trzecim przypadku, $I_j \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$ i dla $y \in I_j$ mamy $|x-y| > \varepsilon/3$. Dlatego

$$H_\varepsilon b_j(x)| \le \int_{I_j} \frac{|b_j(y)|}{|x-y|}\, dy \le \frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)| dy.$$

Sumując po j mamy

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon b(x)| &\le \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + \frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b(y)|\, dy \\ &\le \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} + CMb(x). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} |\{x \notin \Omega^* : H^*b(x) > \lambda/2\}| &\le |\{x \notin \Omega^* : \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1} \le \lambda/4\}| \\ &\quad + |\{x : Mb(x) > \lambda/4\}| \\ &\le \lambda^{-1}\sum_j \|b_j\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}|dx + C\lambda^{-1}\|b\|_1 \\ &\le C\lambda^{-1}\|b\|_{L^1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

□

3.5. **Mnożniki.** Dla funkcji $m \in L^\infty)\mathbb{R}^n$ definiujemy operator T_m ograniczony na $L^2(\mathbb{R}^n)$ wzorem

$$(T_m f)\widehat{\ }(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Mamy z twierdzenia Plancherela

$$\|T_m f\|_2 \le \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

Zadanie 3.6. $\|T_m\|_{L^2\to L^2} = \|m\|_\infty$.

Interesującym zagadnieniem jest znalezienie warunków na m gwarantujących ograniczoność T_m na L^p (w sensie ograniczoności na gęstej klasie funkcji z L^p).

Jeśli $m(\xi) = -isgn(\xi)$, to $T_m = H$.

Oznaczmy przez M_a operator mnożenia przez funkcje $e^{2\pi iax}$, tj $M_a f(x) = e^{2\pi iax} f(x)$. Wówczas mamy $\mathcal{F}(M_a f)(\xi) = f(\xi - a)$. Obliczmy $\mathcal{F}(M_a H M_{-a} f)(\xi)$ dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mamy

$$\mathcal{F}(M_a H M_{-a} f)(\xi) = \mathcal{F}(H M_{-a} f)(\xi - a) = -i\mathrm{sgn}\,(\xi - a)\mathcal{F}(M_{-a} f)(\xi - a) = -i\mathrm{sgn}(\xi - a)\mathcal{F}f(\xi).$$

Zatem operator $M_a H M_{-a}$ jest operatorem mnożnikowym z mnożnikiem $-i\mathrm{sgn}(\xi - a)$. Z drugiej strony operator ten jest ograniczony na L^p i słabego typu (1,1).

Z kolei dla $a < b$ operator

$$S_{a,b} = \frac{i}{2}(M_a H M_{-a} - M_b H M_{-b})$$

jest operatorem mnożnikowym z mnożnikiem $m_{a,b}(\xi) = \chi_{(a,b)}(\xi)$. Jest on ograniczony na L^p, $1 < p < \infty$, i słabego typu (1,1).

Zauważmy, że $\|S_{a,b}f\|_p \leq C_p \|f\|_p$ ze stałą C_p niezależną od a, b. Stąd kładąc $b = -R$, $a = R$ jako wniosek mamy

$$\lim_{R\to\infty} S_{-R,R}f \to f$$

w normie L^p, $1 < p < \infty$. Aby to udowodnić, wystarczy pokazać

Zadanie 3.7. Zbieżność zachodzi dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3.21. **Twierdzenie.** *Jeśli m m jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R}^n)$, wówczas funkcje zdefiniowane poprzez $m(\xi+a)$, $m(\lambda\xi)$, $m(\rho\xi)$, gdzie ρ jest ortogonalnym odwzorowaniem, są mnożnikami na L^p z tą samą normą co T_m.*

D o w ó d . Dowód jest konsekwencją wzorów na transformatę Fouriera. Istotnie,

$$T_{m(\xi+a)}f(x) = \mathcal{F}^{-1}(m(\xi+a)\widehat{f}(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\tau_a(m(\xi)\widehat{f}(\xi-a)))(x) = e^{2\pi iax}T_m(M_{-a}f)(x).$$

Dalej

$$\begin{aligned} T_{m(\lambda\xi)}f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(m(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\delta_\lambda(m(\xi)\delta_{\lambda^{-1}}\widehat{f}(\xi))))(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}(f_\lambda(\xi)))_{\lambda^{-1}}(x) = ((T_m f_\lambda)_{\lambda^{-1}})(x). \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy dla ρ ortogonalnego. $\square$

3.22. **Twierdzenie.** *Jeśli m jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R})$, to $\tilde{m}(\xi) = m(\xi_1)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ jest mnożnikiem na $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

D o w ó d . Zauważmy, że $T_{\tilde{m}}f(x) = T_m f(\,\cdot\,, x_2, x_3, ..., x_n)(x_1)$. Stąd, stosując twierdzenie Fubiniego, mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\tilde{m}}f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |T_m f(\,\cdot\,, x_2, x_3, ..., x_n)(x_1)|^p dx_1 \Big) dx_2 ... dx_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, ..., x_n)|^p dx_1 ... dx_n. \end{aligned}$$

$\square$

3.23. **Wniosek.** *Jeśli $m(\xi)$ jest funkcja charakterystyczną wielościanu P, to m jest mnożnikiem na L^p, $1 < p < \infty$. Ponadto, jeśli $0 \in in\,P$, i m_λ jest funkcja charakterystyczną λP, to $\lim_{\lambda\to\infty} T_{m_\lambda}f \to f$ w normie L^p*

Zadanie 3.8. Niech $f \in L^1$, $\operatorname{supp} f \in B_1$. Wówczas $Mf \in L^1(B_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{B_1} |f(x)| \log^+(|f(x)|) dx < \infty$.

Wskazówka. Udowodnij najpierw nierówności

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C\lambda^{-1} \int_{\{x : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|\, dx,$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \geq c\lambda^{-1} \int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|\, dx,$$

4. Całki singularne.

W niniejszy rozdziale rozważać będziemy operatory całkowe na $\mathbb{R}^n$ postaci

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy, \tag{4.1}$$

gdzie Ω jest zdefiniowana na sferze jednostkowej S^{n-1} całkowalna o całce 0. i $y' = y/|y|$.

Wzór (4.1) jest zdefiniowany dla $f \in \mathcal{S}$ i jest splotem z dystrybucją temperowną

$$\begin{aligned} \langle T, f\rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y)\, dy \\ &= \int_{|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}[f(y) - f(0)] + \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y)\, dy \end{aligned} \tag{4.2}$$

zwaną p.v.$\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$

Mamy oznaczenie $Tf(x) = f * T(x)$.

4.3. **Twierdzenie.** *Warunkiem koniecznym na to, aby (4.2) definiowała dystrybucję temperowaną jest* $\int_{S^{n-1}} \Omega(u) d\sigma(u) = 0$.

D o w ó d. Niech $f \in \mathcal{S}$, $f(x) = 1$ dla $|x| < 1$. Wówczas

$$\langle T, f\rangle = \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(y)\, dy + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy.$$

Pierwsza z całek jest zbieżna, ale druga zapisana we współrzędnych sferycznych jest równa $\int_{S^{n-1}} \Omega \cdot \log(1/\varepsilon)$. $\square$

4.1. **Funkcje i dystrybucje jednorodne i ich transformaty Fouriera.** Funkcje f nazywamy jdenorodną stopnia a jeśli dla każdego $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ i i każdej liczby $\lambda > 0$ mamy

$$f(\lambda x) = \lambda^a f(x).$$

Wówczas dla funkcji ϕ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_\lambda(x)\, dx = \lambda^a \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx.$$

Mówimy, że dystrybucja T jest jednorodna stopnia a, gdy

$$\langle T, \phi_\lambda\rangle = \lambda^a \langle T, \phi\rangle$$

dla $\phi \in \mathcal{S}$.

4.4. **Twierdzenie.** *Jeśli dystrybucja temperowana T jest jednorodna stopnia a, to jej transformacja Fouriera jest jednorodna stopnia $-n-a$.*

D o w ó d .

$\langle \widehat{T}, f_\lambda \rangle = \langle T, \mathcal{F}(f_\lambda) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(f)(\lambda\,\cdot) \rangle = \langle T, \lambda^{-n} f_{\lambda^{-1}} \rangle = \lambda^{-n-a} \langle \widehat{T,} f \rangle = \lambda^{-n-a} \langle \widehat{T}, f \rangle.$

Dowód twierdzenia jest zakończony. $\square$

Zadanie 4.1. Niech $f(x) = |x|^{-a}$, $\frac{n/2}{<} a < n$. Udowodnij, że $\widehat{f}(\xi) = c_{n,a} |\xi|^{a-n}$.

4.5. **Twierdzenie.** *Jeśli Ω jest całkowalną funkcją na S^{n-1} o całce zero, to transformata Fouriera dystrybucji p.v.$\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ jest funkcją jednorodną stopnia zero daną wzorem*

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)[\log(1/|u \cdot \xi'|) - i\frac{\pi}{2}\text{sgn }(u \cdot \xi')] d\sigma(u).$$

D o w ó d . Transformata Fouriera jest jednorodną dystrybucją stopnia zero. Obliczymy $m(\xi)$ dla $\xi \in S^{n-1}$. W tym celu dla $\varepsilon < 1 < R$ niech

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon,R}(\xi) &= \int_{\varepsilon<|y|<R} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} e^{-2\pi i y \xi} dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \Big[\int_\varepsilon^1 (e^{-2\pi i r u \xi} - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^R e^{-2\pi i r u \xi} \frac{dr}{r} \Big] d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \Big[\int_\varepsilon^1 (\cos(2\pi r u \xi) - 1) \frac{dr}{r} + \int_1^R \cos(2\pi r u \xi) \frac{dr}{r} \Big] d\sigma(u) \\ &\quad + \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \Big[\int_\varepsilon^R \sin(2\pi r u \xi) \frac{dr}{r} \Big] d\sigma(u) \\ &= I_{\varepsilon,R}(\xi) - i J_{\varepsilon,R}(\xi). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Możemy przyjąć, że $u \cdot \xi \neq 0$. Stosując zamianę zmiennych $s = 2\pi r |u \cdot \xi|$ mamy

$$J_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_{2p|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} \text{sgn }(u\xi) \sin(s) \frac{ds}{s} d\sigma(u)$$

Stąd łatwo mamy, że $J_{\varepsilon,R}(\xi)$ są wspólnie ograniczone przez $C\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$ niezależnie od ε i R i zbiegają do $\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u \cdot \xi)$.

Przejdźmy do $I_{\varepsilon,R}(\xi)$. Po tej samej zamianie zmiennych dostajemy

$$I_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \Big[\int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} \cos(s) \frac{ds}{s} - \int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|} \frac{ds}{s} \Big] d\sigma(u). \tag{4.7}$$

Zajmiemy się badaniem wewnętrznych całek W. Mamy 3 przypadki.

1. $\varepsilon 2\pi|u\xi| < 1 < R2\pi|u\xi|$. Wtedy

$$W = \Big[\int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^1 (\cos(s) - 1) \frac{ds}{s} + \int_1^{2\pi|u\xi|R} \cos(s) \frac{ds}{s} - \int_1^{2\pi|u\xi|} \frac{ds}{s} \Big].$$

Ponadto W jest ograniczona przez $C + C \log |u \cdot \xi|$.

2. $\varepsilon 2\pi|u\xi| < R2\pi|u\xi| < 1$. Wtedy

$$W = \int_{2\pi|u\xi|\varepsilon}^{2\pi|u\xi|R} (\cos(s) - 1)\frac{ds}{s} - \int_{2\pi|u\xi|}^{2\pi|u\xi|R} \frac{ds}{s}$$

i podobnie jak wyżej W jest ograniczone przez $C + C\log|u\cdot\xi|$.

3. $1 < \varepsilon 2\pi|u\xi| < R2\pi|u\xi|$. Wtedy z (4.7) mamy, że W jest ograniczone przez $C + C\log|u\cdot\xi|$. Przechodząc z $\varepsilon \to 0$ i $R \to \infty$ mamy

$$W_{\varepsilon,R}(\xi) \to \int_0^1 (\cos(s) - 1)\frac{ds}{s} + \int_0^\infty \frac{\cos s}{s} ds - \log|2\pi| - \log|u\cdot\xi|.$$

Obliczając całkę zewnętrzną pamiętając, ze całka z Ω jest równa zero, mamy wzór na $m(\xi)$. $\square$

Dla funkcji Ω, całkowalnej na S^{n-1} o całce zero niech

$$\Omega_e(u) = \frac{1}{2}(\Omega(u) + \Omega(-u)), \quad \Omega_o(u)\frac{1}{2}(\Omega(u) - \Omega(-u)).$$

Obie funkcje mają całkę zero.

Zadanie 4.2.

4.8. **Wniosek.** *Jeśli $\Omega_o \in L^1(S^{n-1})$, $\Omega_e \in L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $q > 1$, to transformata Fouriera m dystrybucji p.v.$\frac{\Omega(y')}{|y|^n}$ jest funkcją ograniczoną.*

4.2. **Metoda rotacji.** Niech T będzie jednowymiarowym operatorem podliniowym ograniczonym na $L^p(\mathbb{R})$. Dla $u \in S^{n-1}$ zdefiniujmy operator T_u na $\mathbb{R}^n$ w następujący sposób. Niech $L_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ i niech $L_u^\perp$ będzie podprzestrzenią prostopadłą do L_u. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x_1 i dokładnie jeden wektor $\bar{x} \in L_u$, że $x = x_1 u + \bar{x}$. Niech

$$T_u f(x) = Tf(\cdot\, u + \bar{x})(x_1).$$

Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)\, dx = \int_{L_u^\perp}\int_{\mathbb{R}} |Tf(\cdot\, u + \bar{x})(x_1)|^p dx_1 d\bar{x} \le C\int_{L_u^\perp}\int_{\mathbb{R}} |f(\cdot\, u + \bar{x})(x_1)|^p dx_1 d\bar{x}$$
$$= \|f\|_{L^p}^p$$

Rozważmy sytuacje gdy M jest jednowymiarową funkcją maksymalną Hardy'ego-Littlewooda. Wówczas

$$M_u f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^h |f(x - tu)|\, dt.$$

Z kolei dla transformaty Hilberta H operator H_u ma postać

$$H_u f(x)\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} f(x - tu)\frac{dt}{t}.$$

4.9. **Wniosek.** *Niech T będzie podliniowym operatorem na $L^p(\mathbb{R})$. Dla $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ niech*

$$T_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u).$$

Wówczas $\|T_\Omega\|$ jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R}^n)$ i jego norma jest ograniczona przez $\|T\| \|\Omega\|_{L^1}$.

D o w ó d . Zastosować nierówność Minkowskiego. $\square$

Zobaczmy postać M_Ω.

$$M_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \sup_{h>0} \int_{-h}^{h} |f(x - tu)| dt d\sigma(u).$$

Zdefiniujmy operator $\mathbb{M}_\Omega$ wzorem

$$\mathbb{M}_\Omega f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B((0,R)} |\Omega(y')| |f(x-y)| dy.$$

Wówczas stosując współrzędne biegunowe mamy

$$\mathbb{M}_\Omega f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B_1| R^n} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \int_0^R |f(x - ru)| r^{n-1} dr d\sigma(u)$$

$$\leq C \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| \sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|r|<R} |f(x-ru)| \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} dr d\sigma(u) \leq C \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| M_u f(x) d\sigma(u).$$

Przejdźmy teraz do H_Ω. Pokażemy, że otrzymamy całki singularne postaci (4.1) dla nieparzystych funkcji Ω.

Niech $f \in \mathcal{S}$. Stosując współrzędne sferyczne całkę (4.1) zapisujemy

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x - ru) \frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_{|t|>\varepsilon} f(x - tu) \frac{dt}{t} d\sigma(u) \qquad (4.10) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x) d\sigma(u). \end{aligned}$$

4.11. **Wniosek.** *Operator całki singularnej (4.1) dla Ω nieparzystego i całkowalnego jest ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.*

W identyczny sposób dowodzimy,że

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \Big| \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y) dy \Big|$$

spełnia

$$t^* f(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| h_u^* f(x) d\sigma(u).$$

Stąd

4.12. **Wniosek.** *T^* jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 < p < \infty$. Ponadto granica w (4.1) istnieje prawie wszędzie.*

4.3. **Transformata Riesza.** Dla $n \geq 2$ i $j = 1, 2, ...n$, definiujemy transformatę Riesza R_j wzorem

$$R_j f(x) = c_n \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\,dy.$$

Oczywiście jest to operator postaci (4.1) z funkcją $\Omega_j(u) = u_j$ nieparzystą klasy C^∞ na sferze. Jest to operator splotu z dystrybucją p.v.$\frac{\Omega_j(y')}{|y|^n}$. Obliczmy transformata Fouriera tej dystrybucji. W tym celu zauważmy

Zadanie 4.3. $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right) = (1-n)\text{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$.

Zatem stosując twierdzenie o transformacie Fouriera dystrybucji jednorodnych z rozdziału 4.1 mamy

$$\begin{aligned} (1-n)\Big(\text{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\Big)\hat{}(\xi) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}\Big)\hat{}(\xi) \\ &= c\xi_j(|x|^{-n+1})\hat{}(\xi) \qquad (4.13) \\ &= c\frac{\xi_j}{|\xi|} \end{aligned}$$

Powyższy wzór implikuje (po odpowiednim doborze stałej c_n) dla $f \in \mathcal{S}$

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 f = -f.$$

4.4. **Całki singularne z jądrem parzystym.** Niech Ω będzie funkcją parzystą na sferze o calce zero należącą do $L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $1 < q < \infty$. Będziemy dystrybucję postaci (4.2) i operator postaci (4.1). Rozkładając dystrybucję T na sumę dwóch, których jedna ma nośnik zwarty w otoczeniu zera, mamy $Tf \in \mathcal{S} + L^r$ dla każdego $1 < r \leq q$.

Niech

$$K_\varepsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{|x|>\varepsilon\}}(x).$$

Mamy $K_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < r \leq r$. Zatem dla $f \in \mathcal{S}$ funkcje $R_j(K - \varepsilon * f)$ i $(R_j K_\varepsilon) * f$ są w L^r i stosując transformatę Fouriera łatwo wykazać, że są sobie równe.

4.14. **Lemat.** *Istnieje funkcja $\tilde{K}_j$ nieparzysta jednorodna stopnia $-n$, taka, że*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_j K_\varepsilon(x) = \tilde{K}_j(x)$$

w nomie L^∞ na każdym zbiorze zwartym niezawierającym 0 (nawet na zbiorze $\{|x| > a\}$)

D o w ó d. Niech $0 < \varepsilon < \nu < a < \frac{|x|}{2}$. Stosując po drodze $\int \Omega = 0$ mamy

(4.15)

$$\begin{aligned} R_jK_\varepsilon(x) - R_jK_\nu(x) &= c_n \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \chi_{\{|x-y|>\delta\}}(x-y)[K_\varepsilon(y) - K\nu(y)]\, dy \\ &= c_n \int_{\varepsilon<|y|<\nu} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\, dy \\ &= c_n \int_{\varepsilon<|y|<\nu} \Big[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\Big] \frac{\Omega(y')}{|y|^n}\, dy \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej mamy

$$(4.16)\qquad |R_jK_\varepsilon(x) - R_jK_\nu(x)| \le \frac{C}{|x|^{n+1}} \int_{\varepsilon<|y|<\nu} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^{n-1}}\, dy \le \frac{C\nu}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}$$

Stąd $R_jK_\varepsilon(x)$ jest ciągiem Cauchego na $\{|x| > a\}$. Zatem

$$K_j^*(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon(x)$$

i granica istnieje prawie wszędzie. Ponadto $K_j^*(x)$ jest funkcją nieparzystą prawie wszędzie. Zdefiniujemy teraz funkcję $\tilde{K}_j$ nieparzystą (wszędzie) równą K_j^* prawie wszędzie spełniającą $\tilde{K}_j(\lambda x) = \lambda^{-n}\tilde{K}_j(x)$ wszędzie. W tym celu ustalmy $\lambda > 0$ Wówczas dla prawie każdego x mamy

$$(4.17)\qquad \begin{aligned} R_jK_\varepsilon(\lambda x) &= \lim_{\delta\to 0} c_n \frac{\lambda x_j - y_j}{|\lambda x - y|^{n+1}} K_\varepsilon(y)\, dy \\ &= \lim_{\delta\to 0} c_n \int_{|x-y|>\delta/\lambda} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} \lambda^{-n} K_{\varepsilon/\lambda}(y)\, dy \\ &= \lambda^{-n} T_j K_{\varepsilon/\lambda} K(x). \end{aligned}$$

Stąd przy ustalony $\lambda > 0$ dla prawie każdego x mamy $K_j^*(\lambda x) = \lambda^{-n}K_j^*(x)$. Zbiór $D\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) : K_j^*(\lambda x) \ne \lambda^{-n}K_j^*(x)\}$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Wynika to z twierdzenia Fubiniego. Stąd istnieje $\rho > 0$, że sfera $S_\rho = \{x : |x| = \rho\}$ ma własność taką, że dla prawie każdego $x \in S_\rho$ mamy $\{x\} \times (0,\infty) \cap D$ ma miarę zero na $(0,\infty)$. Zatem istnieje zbiór $A \subset S_\rho$ miary pełnej na sferze S_ρ, że $\{x\} \times (0,\infty) \cap D$ ma miarę zero dla każdego $x \in A$. Wówczas

$$(4.18)\qquad \tilde{K}_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^n K_j^*\left(\frac{\rho x}{|x|}\right) & \text{dla } \frac{\rho x}{|x|} \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

jest szukaną funkcją. □

4.19. **Lemat.**

$$\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) \le C_q \|\Omega\|_q.$$

Ponadto jeśli $\tilde{K}_{j,\varepsilon}(x) = \tilde{K}_j(x)\chi_{|x|>\varepsilon}(x)$, *to* $\Delta_\varepsilon = R_jK_\varepsilon - \tilde{K}_{j,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i*

$$\|\Delta_\varepsilon\|_{L^1} \le C_q \|\Omega\|_q.$$

D o w ó d . Z jednorodności $\tilde{K}_j$ mamy

(4.20)
$$\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) = \frac{1}{\log 2} \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x)|\, dx$$
$$\leq \frac{1}{\log 2} \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x) - R_j K_{1/2}(x)|\, dx + \frac{1}{\log 2} \int_{1<|x|<2} |R_j K_{1/2}(x)|\, dx$$

We wzorze (4.16) niech $\nu = 1/2$, $|x| > 1$. Wówczas biorąc granicę przy $\varepsilon \to 0$ mamy □

$$|\tilde{K}_j(x) - R_j K_{1/2}(x)| \leq \frac{C\|\Omega\|_{L^1}}{|x|^{n+1}}. \tag{4.21}$$

Stąd ograniczoność pierwszej całki przez $C\|\Omega\|_q$ Oszacujmy drugą całkę:

$$\int_{1<|x|<2} |R_j K_{1/2}(x)| dx \leq C\|R_j K_{1/2}\|_q \leq C\|K_{1/2}\|_q \leq C\|\Omega\|_q.$$

Przejdźmy do dowodu drugiej części lematu. Zauważmy, że $\Delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\Delta_1(x/\varepsilon)$. Zatem wystarczy pokazać $\|\Delta_1\|_1 < \infty$.

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_1 &= \int |R_j K_1(x) - \tilde{K}_{j,1}(x)|\, dx \\ &\leq \int_{|x|<2} |R_j K_1(x)| dx + \int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x)|\, dx + \int_{|x|>2} |\Delta_1(x)| dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Mamy $I_1 \leq C\|R_j K_1\|_q \leq C\|K_1\|_q \leq \|\Omega\|_q$. Dalej $I_2 \leq C\|\Omega\|_q$. Aby oszacować I_3 stosujemy (4.16) dostając $\Delta_1(x)| \leq C\|\Omega\|_1 |x|^{-n-1}$, co daje $I_3 \leq \|\Omega\|_q$.

4.23. **Twierdzenie.** *Niech $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ dla pewnego $q > 1$, $\in \Omega d\sigma = 0$, $\Omega(x) = \Omega(-x)$. Wówczas operator (4.1) jest ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.*

D o w ó d . Dla $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon * f(x).$$

□

Dalej $K_\varepsilon f(x) = -\sum R_j(R_j K_\varepsilon) * f$, $(R_j K_\varepsilon) * f = \tilde{K}_{j,\varepsilon} * f + \Delta_\varepsilon * f$. Stosując fakt, że $\tilde{K}_j$ jest jądrem nieparzystym, więc z wniosku 4.12 mamy

$$\|\tilde{K}_{j,\varepsilon} * f\|_{L^p} \leq C \int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(u)| d\sigma(u) \|f\|_p \leq C\|\Omega\|_q \|f\|_p.$$

Ponadto,

$$\|\Delta_\varepsilon * f\|_p \leq C_q \|\Omega\_q\|f\|_p.$$

Powyższe dwie nierówności dają $\|K_\varepsilon f\|_p \leq C\|\Omega\|_q \|f\|_p$. Stosując lemat Fatou mamy $\|Tf\|_p \leq C\|\Omega\|_q \|f\|_p$. □

5. Teoria Calderóna-Zygmunda

5.1. **Podstawy teorii Calderóna-Zygmunda.**

5.1. **Twierdzenie** (Caldrón-Zygmund). *Niech $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, K pokrywa się z funkcją lokalnie całkowalną $K(x)$ na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, spełnia*

$$|\widehat{K}(\xi)| \le A, \tag{5.2}$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \le B \tag{5.3}$$

Wówczas

$$\|f * K\|_p \le C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty, \tag{5.4}$$

$$|\{x : |f * K(x)| > \lambda\}| < C\lambda^{-1}\|f\|_1 \tag{5.5}$$

Warunek (5.3) nosi nazwę warunku Hörmandera.

Zadanie 5.1. Jeśli $\nabla K(x)| \le C|x|^{-n-1}$, dla $x \ne 0$ to spełniony jest warunek Hörmandera.

Dowód. Z (5.2) wynika $\|f * K\|_2 \le A\|f\|_2$. Wystarczy udowodnić słaby typ (1,1) a potem zastosować twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza i otrzymać ograniczoność dla $1 < p < 2$. Dla $p > 2$ przechodzimy przez dualność, bo jądro operatora K^* to $K(-x)$. Możemy zakładać, że K jest funkcją rzeczywistą.

Niech $f \in \mathcal{S}$. Niech Q_j będzie rozkładem Calderóna-Zygmunda na poziomie $\lambda > 0$. Mamy

(5.6)

$$|\{x : |f * K(x)| > \lambda\}| \le |\bigcup 2Q_j| + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |f * K(x)| > \lambda\}|$$
$$\le C\lambda^{-1}\|f\|_1 + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |g * K(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \notin \bigcup 2Q_j : |b * K(x)| > \lambda/2\}|$$

□

Mamy $\|g\|_2^2 \le \lambda\|f\|_1$. Zatem

$$|\{x \notin \bigcup 2Q_j : |g * K(x)|\lambda/2\}| \le C\lambda^{-2}\|g\|_2^2 \le C\lambda^{-1}\|f\|_1.$$

Przejdźmy do funkcji b.

$$
\begin{aligned}
|b * K(x)| &\le \sum_j \Big| \int_{Q_j} b_j(y) K(x-y)\, dy \Big| \\
&= \sum_j \Big| \int_{Q_j} b_j(y) \Big(K(x-y) - K(x-c_j) \Big) dy \\
&\le \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| |K(x-y) - K(x-c_j)| dy
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Całkując względem $x \notin \bigcup 2Q_j$ i stosując twierdzenie Fubiniego mamy

$$
\int_{x \notin \bigcup 2Q_j} |b * K(x)| dx \le CB \|f\|_1,
$$

co po zastosowaniu nierówności Czebyszewa kończy dowód twierdzenia.

Wróćmy do jąder jednorodnych $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. Co musimy założyć o Ω aby mieć zagwarantowany warunek Hörmandera? Niech

$$
\omega_\infty(t) = \sup\{|\Omega(u_1) - \Omega(u_2)| : |u_1 - u_2| \le t,\ u_1, u_2 \in S^{n-1}\}.
$$

Mówimy, że Ω spełnia warunek Diniego, gdy

$$
\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt < \infty.
$$

5.8. **Lemat.** *Jeśli Ω spełnia warunek Diniego, to $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ spełnia warunek Hörmandera.*

D o w ó d. Warunek Diniego implikuje, że Ω jest funkcją ograniczoną.

$$
|K(x-y) - K(x)| \le \frac{|\Omega((x-y)') - \Omega(x')|}{|x-y|^n} + |\Omega(x')| \Big| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \Big|. \tag{5.9}
$$

Druga funkcja, z ograniczoności Ω i z twierdzenia o wartości średniej jest ograniczona na zbiorze $|x| > 2|y|$ przez $C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}$, zatem całkowalna po tym zbiorze. Ponadto na zbiorze $|x| > 2|y|$ mamy

Zadanie 5.2.

$$
|(x-y)' - x'| \le C \frac{|y|}{|x|}.
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>2|y|} \frac{|\Omega((x-y)') - \Omega(x')|}{|x-y|^n} dx &\le \int_{|x|>2|y|} \frac{\omega_\infty(4|y|/|x|)}{(|x|/2)^n} dx \\
&= 2|S^{n-1}| \int_0^2 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt \le C.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

□

5.11. **Wniosek.** *Jeśli Ω ma całkę zero i spełnia warunek Diniego, to operator*

$$Tf(x) = p.v. \int \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

jest słabego typu (1,1). Ograniczoność na L^p, $1 < p < \infty$ wynika także z metody rotacji.

Interesuje nas teraz pytanie przy jakich założeniach na jądro K jego transformata Fouriera jest funkcją ograniczoną? Odpowiedzią jest poniższy lemat.

5.12. **Lemat.** *Niech $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ będzie taki, że*

$$\Big| \int_{a<|x|<b} K(x)dx \Big| \leq A \qquad \text{dla każdych } 0 < a < b, \tag{5.13}$$

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|dx \leq C \quad \text{dla każdego } \; a > 0, \tag{5.14}$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq C \quad \text{dla każdego } \; y. \tag{5.15}$$

Niech $K_{\varepsilon,R}(x) = K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|<R\}}$. Wówczas

$$K_{\varepsilon,R}\hat{}(\xi) \leq D.$$

Stała D zależy jedynie od n, stałych A, B, C a nie jest zależna o d ε, R.

D o w ó d. Zauważmy, że (5.14) jest równoważny

$$\int_{|x|<a} |x||K(x)| \leq B'a \tag{5.16}$$

Istotnie

$$\int_{|x|<a} |x||K(x)|dx \leq\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}<|x|<2^{-j}} 2^{-j}a|K(x)|dx \leq 2Ba.$$

Odwrotnie

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|dx \leq \int_{|x|<2a} |K(x)||x|a^{-1} \leq B'aa^{-1} \leq B'.$$

Ustalmy ξ. Jeśli $\varepsilon < |\xi|^{-1} < R$, to

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon,R}\hat{}(\xi) &= \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi ix\xi}dx + \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} K(x)e^{-2\pi ix\xi}dx \\ &= I_1(\xi) + I_2(\xi). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Jeśli $|\xi|^{-1} < \varepsilon$, to rozważamy tylko I_2. Jeśli $|\xi|^{-1} > R$, to tylko I_1. Mamy

$$I_1 = \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)dx + \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)(e^{2\pi ix\xi} - 1)dx$$

Stosując założenia lematu i twierdzenie o wartości średniej mamy

$$|I_1| \le A + C|\xi| \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} |K(x)||x|dx \le A + CB'.$$

Dla szacowania I_2 niech $z = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2}$.

$$(5.18)\qquad \begin{aligned} I_2 &= \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} K(x-y)e^{-2\pi i(x-z)\xi}dx \\ &= -\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} K(x-y)e^{-2\pi ix\xi}dx \end{aligned}$$

Stąd

$$2I_2 = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} K(x)e^{-2\pi ix\xi}dx - \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} K(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Co daje

$$(5.19)\qquad \begin{aligned} |2I_2| \le &\int_{|\xi|^{-1}<|x|<R+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)-K(x-z)|dx + \int_{R<|x|<R+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \\ &+ \int_{R-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<R+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \end{aligned}$$

Powyższa nierówność wynika z analizy obszarów całkowania i sprawdzenie jej poprawności zostawiamy jako ćwiczenie. Stosując założenia mamy

$$|2I_2| \le D'.$$

□

5.20. **Wniosek.** *Załomy, że K spełnia założenia powyższego lematu. Wówczas*

$$\|f * K_{\varepsilon,R}\|_p \le C_p\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$|\{x : |f * K_{\varepsilon,R}(x)| > \lambda\}| \le \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_1.$$

Stałe C_p zależą od wymiaru i stałych w warunkach lematu, nie zależą od ε i R.

D o w ó d . Wystarczy sprawdzić, że

$$\int_{|x|>2|y|} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x)|dx \le C$$

niezależnie od ε, R. Co jest kolejnym zadaniem. □

Naturalnym jest pytanie, kiedy $\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} f * K_{\varepsilon,R}(x)$ dobrze zdefiniowane. Mamy

5.21. **Lemat.** *Dane jest jądro spełniające warunek (5.14). Wówczas*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} K(x)f(x)dx$$

wyznacza dystrybucję temperwoaną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx$$

istnieje.

Dowód. Zauważmy, że $\int_{|x|>1} f(x)K(x)dx$ istnieje. Istotnie dla $f\in\mathcal{S}$ mamy

$$\int_{|x|>1}|f(x)K(x)|dx \le \|xf\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k<|x|<2^{k+1}}|K(x)|dx \le 2B\|xf\|_\infty.$$

Dlatego

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)f(x)dx$$

musi istnieć dla dobrego zdefiniowania dystrybucji. Biorąc za $f\in\mathcal{S}$ funkcje równą 1 na kuli jednostkowej mamy, że jeśli całka zadaje dystrybucję, to warunek wyrażony w lemacie zachodzi.

Odwrotnie, załóżmy, że warunek wyrażony w lemacie zachodzi i granica równa się L. Wówczas

(5.22)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} f(x)K(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}\Big[(f(x)-f(0))K(x) + f(x)K(x)\Big]\,dx$$
$$= Lf(0) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1}(f(x)-f(0))K(x)dx$$

Zauważmy, ze ostatnia granica istnieje bo $|f(x)-f(0)|\le C|x|$ i możemy zastosować warunek równoważny (5.14). $\square$

5.23. **Wniosek.** *Załóżmy, że K spełnia warunki lematu 5.12 i 5.21. Wówczas operator zadany wzorem*

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon} K(y)f(x-y)dy$$

jest ograniczony na L^p, $1<p<\infty$, i słabego typu (1,1).

5.2. **Lemat Cotlara.** Poniższy lemat pozwala udowodnić ograniczoność na L^2 pewnych operatorów bez uzycia transformaty Fouriera.

5.24. **Twierdzenie** (Lemat Cotlara). *Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta a $\{T_j\}_j$ rodziną operatorów liniowych ograniczonych taką, że istnieje stała $C>0$, że dla każdego i mamy*

$$\sum_j \|T_jT_i^*\|^{1/2}\le C,\quad \sum_j \|T_j^*T_i\|^{1/2}\le C.$$

Wówczas dla każdego m, n mamy

$$\|\sum_{j=n}^{m} T_j\| \leq C,$$

to znaczy skończone sumy operatorów mają normy wspólnie ograniczone przez stałą C.

Dowód. Niech $S = \sum_{j=n}^{m} T_j$. Wówczas $\|S\| = \|(SS^*)^k\|^{1/k}$. Ale

$$(SS^*)^k = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{2k}}^{m} T_{j_a} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*.$$

Mamy

$$\|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_a} T_{j_2}^*\| \, \|T_{j_3} T_{j_4}^*\| \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|,$$

$$\|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_1}\| \, \|T_{j_2}^* T_{j_3}\| \, \|T_{j_4}^* T_{j_5}\| \dots \|T_{j_{2k-2}}^* T_{j_{2k-1}}\| \, \|T_{j_{2k}}^*\|.$$

Biorąc średnią geometryczną mamy

$$\|T_{j_1} T_{j_2}^* T_{j_3} T_{j_4}^* \dots T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\| \leq \|T_{j_1}\|^{1/2} \|T_{j_1} T_{j_2}^*\|^{1/2} \|T_{j_2}^* T_{j_3}\|^{1/2} \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|^{1/2} \|T_{j_{2k}}^*\|^{1/2}$$
$$\leq C \|T_{j_1} T_{j_2}^*\|^{1/2} \|T_{j_2}^* T_{j_3}\|^{1/2} \dots \|T_{j_{2k-1}} T_{j_{2k}}^*\|^{1/2}$$

Sumując kolejno po j_1 następnie po j_2 itd mamy

$$\|(SS^*)^k\| \leq C^{2k}(m - n + 1).$$

Zatem

$$\|S\| \leq C(m - n + 1)^{1/(2k)},$$

Obliczając granicę lewej strony przy $k \to \infty$ mamy wymaganą nierówność. □

Zadanie. 5.3. Wykaż, że lemat Cotlara pociąga zbieżność szeregu

$$\lim_{n \to -\infty, \ m \to \infty} \sum_{j=m}^{n} T_j x$$

dla każdego $x \in \mathcal{H}$.

Wskazówka: Rozważ skończone sumy operatorów postaci $\sum \varepsilon_j T_j$, gdzie $\varepsilon_j = 0, 1, -1$.

5.3. **Operatory Calderóna-Zygmunda.** Poniższe twierdzenie stanowi uogólnienie twierdzenia w przypadku, gdy operator T jest operatorem splotowym i ma identyczny dowód.

5.25. **Twierdzenie.** *Niech T będzie ograniczonym operatorem na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że istnieje funkcja $K(x, y)$ określona na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$, gdzie $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, taka że dla $f \in L^2$ o nośniku zwartym zachodzi*

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy \qquad \text{dla} \ \ x \notin supp\, f. \tag{5.26}$$

Załóżmy dodatkowo, że

$$\int_{|x-y|>2|y-z|} |K(x,y) - K(x,z)|dx \leq C, \tag{5.27}$$

$$\int_{|x-y|>2|x-w|} |K(x,y) - K(w,y)|dy \leq C. \tag{5.28}$$

Wówczas T jest słabego typu (1.1) i ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$. Stałe ograniczające normy operatora T zależą od wymiaru, p i stałej C w powyższych nierównościach.

Do dowodu słabego typu wykorzystuje się nierówność (5.27). Nierówność (5.28) potrzebna jest dla ograniczoności na L^p dla $p > 2$.

Definicja. K jest standardowym jądrem, gdy dla pewnych stałych $C, \delta > 0$ mamy

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \tag{5.29}$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{dla} \quad |x-y| > 2|y-z|, \tag{5.30}$$

$$|K(x,y) - K(w,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \quad \text{dla} \quad |x-y| > 2|x-w|, \tag{5.31}$$

Zadanie 5.4. Wykaż, że jądro standardowe spełnia warunki (5.27) i (5.28).

Definicja. Operator T jest nazywany (uogólnionym) operatorem Calderóna-Zygmunda, gdy T jest ograniczony na L^2 i istnieje standardowe jądro $K(x,y)$, ze dla f o nośniku zwartym zachodzi

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy \qquad \text{dla} \quad x \notin \operatorname{supp} f.$$

Uwaga: Operator Calderóna-Zygmunda nie musi być postaci

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy. \tag{5.32}$$

Przykład operatora Calderóna-Zygmunada nie będącego postaci (5.32) zostanie omówiony w dalszej części wykładu.

Definicja. Jeśli operator Calderóna-Zygmunad T zadany jest (5.32), to mówimy, że T jest operatorem Calderóna-Zygmunda zadanym całką singulrną (principal value integral).

Zadanie 5.5. Na to, aby granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)dy$$

istniała prawie wszędzie dla każdej funkcji $f \in C_c^\infty$ potrzeba i wystarcza, aby granica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1>|x-y|>\varepsilon} K(x,y)dy$$

istniała prawie wszędzie.

Zadanie 5.6. Udowodnij, że jeśli dwa operatory Calderóna-Zygmunda mają te same jądra, to ich różnica jest operatorem mnożenia przez funkcję ograniczoną.

Wskazówka. Rozważ funkcje $g_A(x) = T\chi_A(x)$, gdzie A jest zbiorem zwartym.

Będziemy się zajmować teraz operatorem Calderóna-Zygmunda zadanym przez całkę singularną.

Oznaczmy

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)dy.$$

Interesuje nas czy

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = Tf(x)$$

prawie wszędzie? Pozytywną odpowiedź na to pytanie uzyskamy dowodząc

5.33. **Twierdzenie.** *Niech T będzie operatorem Calderóna-Zygmunda zadanym całką singularną. Oznaczmy*

$$T^*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

Wówczas T^* jest słabego typu (1,1) i ograniczony na L^p dla $1 < p < \infty$.

5.34. **Lemat** (Nierówność Kołmogorowa)**.** *Jeśli S jest słabego typu (1,1), to dla każdego $0 < \nu < 1$ istnieje stała $C > 0$, że dla każdego zbioru E miary skończonej mamy*

$$\int_E |Sf(x)|^\nu dx \le C|E|^{1-\nu}\|f\|_1\nu.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\int_E |Sf(x)|^\nu dx &= \nu\int_0^\infty \lambda^{\nu-1}|\{x\in E:\ |Sf(x)|>\lambda\}d\lambda\\ &\le \nu\int_0^\infty \lambda^{\nu-1}\min(|E|, C\lambda^{-1}\|f\|_1)d\lambda\\ &= \nu\int_0^{C\|f\|_1/\lambda} \lambda^{\nu-1}|E|d\lambda + \nu\int_{C\|f\|_1/\lambda} C\lambda^{\nu-2}\|f\|_1 d\lambda\\ &\le C|E|^{1-\nu}\|f\|_1^\nu.\end{aligned} \tag{5.35}$$

□

5.36. **Lemat** (Nierówność Cotlara). *Jeśli T jest operatorem Calderóna-Zygmunda zadanym całką singularną, to dla każdego $0 < \nu \leq 1$ istnieje stała $C > 0$, że*

$$T^*f(x) \leq C_\nu (M(|Tf|^\nu)(x)^{1/\nu} + Mf(x).$$

D o w ó d. Udowodnimy, że

$$T_\varepsilon f(0) \leq C\Big(M(|Tf|^\nu)(0)^{1/\nu} + Mf(0)\Big)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $Q = B(0, \varepsilon/2)$, $2Q = B(0,\varepsilon)$, $f_1 = f\chi_{2Q}$, $f_2 = f - f_1$. Then

$$Tf_2(x) = \int_{|y|>\varepsilon} K(0,y)f(y)\,dy = T_\varepsilon f(0).$$

Jeśli $z \in Q$, to

$$\begin{aligned} |Tf_2(0) - Tf_2(z)| &\leq \Big| \int_{|y|>\varepsilon} (K(z,y) - K(0,y))f(y)\,dy\Big| \\ &\leq C|z|^\delta \int_{|y|>\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+\delta}}\,dy \\ &\leq C\varepsilon^\delta \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k\varepsilon<|y|<2^{k+1}\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|y|^{n+\delta}} dy \\ &\leq C\varepsilon^\delta (2^k\varepsilon)^{-\delta} \frac{1}{(2^k\varepsilon)^n} \int_{|y|<2^{k+1}\varepsilon} |f(y)|dy \\ &\leq CMf(0). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Stąd dla $z \in Q$ mamy

$$\begin{aligned} |T_\varepsilon f(0)| = |Tf_2(0)| &\leq |Tf_2(0) - Tf_2(z)| + |Tf_2(z)| \\ &\leq CMf(0) + |Tf_1(z)| + |Tf(z)| \end{aligned} \tag{5.38}$$

Jeśli $T_\varepsilon f(0) = 0$, to nie ma czego dowodzić. Jeśli $T_\varepsilon f(0) \neq 0$, to niech $0 < \lambda < |T_\varepsilon f(0)|$ i

$$Q_1 = \{z \in Q : |Tf(z)| > \lambda/3\},$$
$$Q_2 = \{z \in Q : |Tf_1(z)| > \lambda/3\},$$

$$Q_3 = \begin{cases} \emptyset & \text{if } CMf(0) \leq \lambda/3, \\ Q & \text{if } CMf(0) > \lambda/3. \end{cases} \tag{5.39}$$

Wówczas $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, a więc $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|$. Ale z nierówności Czebyszewa mamy

$$|Q_1| \leq 3\lambda^{-1} \int_Q |Tf(z)|dz \leq 3\lambda^{-1}|Q|M(Tf)(0).$$

Dalej ze słabego typu (1.1) dla T dostajemy

$$|Q_2| \leq 3C\lambda^{-1}\|f_1\|_1 = 3C\lambda^{-1} \int_Q |f(z)|dz \leq 3C\lambda^{-1}|Q|Mf(0).$$

Dalej, jesli $Q_3 = Q$, to $3CMf(0) > \lambda$. Jeśli $Q_3 = \emptyset$, to $|Q| \leq |Q_1| + |Q_2| \leq 3C\lambda^{-1}|Q|(Mf(0) + M(Tf)(0))$. Zatem w każdym przypadku

$$\lambda < 3C(Mf(0) + M(Tf)(0)).$$

Nierówność ta zachodzi dla każdego $\lambda < |T_\varepsilon f(0)|$, zatem

$$|T_\varepsilon f(0)| \leq 3C(Mf(0) + M(Tf)(0)).$$

Zatem mamy udowodnioną nierówność dla $\nu = 1$.

Jeśli $0 < \nu < 1$, to

$$|T_\varepsilon f(0)|^\nu \leq CMf(0)^\nu + C|Tf_1(z)|^\nu + |Tf(z)|^\nu.$$

Biorąc średnią po Q mamy

$$|T_\varepsilon f(0)|^\nu \leq CMf(0)^\nu + CM(|Tf|^\nu)(0) + \frac{C}{|Q|}\int_Q |Tf_1(z)|^\nu dz.$$

Stosując nierówność Kołmogorowa dostajemy

$$\Big(\int_Q |Tf_1(z)|^\nu dz\Big)^{1/\nu} \leq C\Big(\frac{1}{|Q|}|Q|^{1-\nu}\|f_1\|_1^\nu\Big)^{1/\nu} = \frac{C}{|Q|}\|f_1\|_1 \leq CMf(0).$$

Ostatnie trzy nierówności dają tezę.

Dowód twierdzenia 5.33. Ograniczoność na L^p dla $1 < p < \infty$ wynika z nierówności Cotlara dla $\nu = 1$ i ograniczoności T. Przejdźmy do dowodu słabego typu (1.1). Z nierówności Cotlara may

$$|\{x : |T^*f(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |Mf(x)| > \lambda/(2C)\}| + |\{x : (M(|Tf|^\nu)(x)|^{1/\nu} > \lambda/2C\}|$$

Szacowanie pierwszego składnika jest oczywiste ze słabego typu dla M. Oznaczmy $E = \{\{x : (M_d(|Tf|^\nu)(x)| > 4^{-n}(\lambda/2C)^\nu\}$. Wówczas drugi składnik jest szacowany prze $|E|$. Jeśli $f \in C_c^\infty$, to miara $2^n|E|$ jest skończona zatem

$$|E| \leq \frac{C}{\lambda^\nu}\int_E |Tf(y)|^\nu dy;$$

bo w diadycznej funkcji maksymalnej wystarczy brać całkę po E zamiast po $\mathbb{R}^n$. Stosując nierówność Kołmogorowa, mamy

$$|E| \leq C\lambda^{-\nu}|E|^{1-\nu}\|f\|_1^\nu.$$

Co daje $|E| \leq C\lambda^{-1}\|f\|_1$. $\square$

Dokończenie dowodu twierdzenia 5.33 dla $f \in L^1$. Pozbędziemy się teraz założenia o przynależności f do C_c^∞. Niech $f \in L^1$, $\|f\|_1 = 1$ i niech $f_n \in C_c^\infty$ będą takie, że $\|f - f_n\|_1 \leq 2^{-n-1}$, $f_0 = 0$.

5.40. **Lemat.** $|T^*f_n(x) - T^*f_m(x)| \leq T^*(f_n - f_m)(x)|$.

D o w ó d. Ustalmy $\delta > 0$. Istnieje $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, że $T^*f_n(x) < |T_{\varepsilon_1}f_n(x)| + \delta$, $T^*f_m(x) < |T_{\varepsilon_2}f_n(x)| + \delta$ Możemy przyjąć, że $T^*f_n(x) > T^*f_m(x)$. Wówczas

$$|T^*f_n(x) - T^*f_m(x)| = T^*f_n(x) - T^*f_m(x) \leq |T_{\varepsilon_1}f_n(x)| - |T_{\varepsilon_1}f_m(x)| + \delta$$
$$\leq |T_{\varepsilon_1}f_n(x) - T_{\varepsilon_1}f_m(x)| + \delta \leq T^*(f_n - f_m)(x) + \delta.$$

□

5.41. **Lemat.** *$T^* f_n(x)$ zbiega prawie wszędzie przy $n \to \infty$.*

D o w ó d.

$$T^* f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x),$$

gdzie

$$g_k(x) = T^* f_k(x) - T^* f_{k-1}(x).$$

Udowodnimy, że szereg

$$\sum_n |g_n(x)|$$

jest zbieżny dla prawie wszystkich x. Ustalmy $A > 0$. Wówczas ze słabego typu (1.1) na funkcjach C_c^∞ mamy

$$|\{x : |g_m(x)| > Am^{-2}\}| \leq |\{x : |T^*(f_m - f_{m-1})(x)| > Am^{-2}\}| \leq Cm^2 A^{-1} 2^{-m}.$$

Daje to

$$\left| \bigcup \{x : |g_m(x)| > Am^{-2}\} \right| \leq CA^{-1}.$$

Stąd na dopełnieniu zbioru $\bigcup \{x : |g_m(x)| > Am^{-2}\}$, który jest małej miary mamy zbieżność szeregu. □

Niech $F(x) = \lim_{n\to\infty} T^* f(x)$.

5.42. **Lemat.** *$T^* f_n(x)$ zbiega do $F(x)$ według miary.*

D o w ó d. Mamy

$$|\{x : |F(x) - f_n(x)| > \delta\}| \leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |g_{n+k}(x)| > c\delta(n+k)^{-2}\} \right| \to 0$$

przy $n \to \infty$. □

Oznaczmy $T^* f(x) = \lim_n T^* f_n(x) = F(x)$.

5.43. **Lemat.** *$T^* f(x)$ spełnia szacowania słabego typu (1.1)*

D o w ó d.

$$|\{x|F(x) > \lambda\}| \leq |\{x : |f(x) - T^* f_n(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : T^* f_n(x) > \lambda/2\}|$$

$$\leq |\{x : |f(x) - T^* f_n(x)| > \lambda/2\}| + 2C\|f\|_1 2\lambda^{-1}.$$

Zauważmy, że pierwszy składnik ostatniej sumy dąży do 0 przy $n \to \infty$ □

Niech $S^*f(x) = \sup_\varepsilon |T_\varepsilon f(x)|$. Mamy $S^*f(x) \leq T^*f(x)$. Istotnie, jeśli $S^*f(x) > \lambda$, to istnieje ε, że $|T_\varepsilon f(x)| > \lambda$. Czyli

$$\Big|\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy\Big| > \lambda.$$

Daje, to

$$\Big|\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f_n(y)\,dy\Big| > \lambda$$

dla n dostatecznie dużych, czyli $T^*f(x) > \lambda$.

5.44. **Wniosek.** S^* *jest słabego typu (1,1).*

5.45. **Wniosek.** $S^* = T^*$.

Dowód. Operator $|S^* - T^*|$ jest słabego typu (1.1) i na zbiorze gęstym w L^1 jest równy zero. Dokończenie dowodu jest zadaniem. $\square$

6. Twierdzenie mnożnikowe Hörmandera

6.1. **Wstępne szacowania.** Mówimy, ze funkcja g należy do przestrzeni Sobolewa $H_p(\mathbb{R}^n)$, gdy

$$\|g\|_{H_p}^2 = \int |\hat{g}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2p}\, d\xi < \infty.$$

Oznaczmy przez $J = \{x \in \mathbb{R} : 1/2 \le |x| \le 2\}$.

6.1. **Lemat.** *Załóżmy, że $m_0 \in H_{1/2+\varepsilon}$, supp $m \subset J$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, $C > 0$, że*

$$\int |\hat{m}_0(x)|(1+|x|)^{\delta} dx \le C\|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}$$

D o w ó d. Oczywiście $m \in C^\infty(\mathbb{R})$ jako transformata Fouriera dystrybucji o nośniku zwartym. Stosując nierówność Höldera mamy

(6.2)

$$\begin{aligned}\int |\hat{m}_0(x)|(1+|x|)^{\delta} &= \int |\hat{m}_0(x)|(1+|x|)^{1/2+\varepsilon}(1+|x|)^{-1/2-\varepsilon+\delta}\\ &\le \Big(\int |\hat{m}_0(x)|^2(1+|x|)^{1+2\varepsilon}dx\Big)^{1/2}\Big(\int (1+|x|)^{-1-2\varepsilon+2\delta}dx\Big)^{1/2}\\ &= C\|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

□

Zadanie 6.1. Udowodnij, że jeśli $g \in H_s$, $s > n/2$, to g jest funkcją ciągłą.

6.3. **Lemat.** *Przy założeniach poprzedniego lematu pochodna funkcji $\hat{m}_0$ spełnia*

$$\int |\hat{m}_0'(x)|(1+|x|)^{\delta} dx \le C'\|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}$$

D o w ó d. Zauważmy, że

$$\hat{m}_0'(x) = C\int \xi m(\xi) e^{-2\pi i x\xi} d\xi = C\int (\xi\psi_0(\xi)m(\xi))e^{-2\pi i x\xi} d\xi,$$

gdzie $\psi_0 \in C_c^\infty$, $\psi = 1$ na J.

Niech $\psi(\xi) = \xi\psi_0(\xi)$. Zatem $\hat{m}_0'(x) = \hat{\psi} * \hat{m}_0(x)$. Łatwo sprawdzić teraz, że

$$\int |\hat{\psi} * \hat{m}_0(x)|(1+|x|)^{\delta} dx \le C\|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}.$$

□

6.4. **Lemat.** *Przy założeniach poprzednich lematów istnieje stałą $C > 0$, że*

$$\int |\hat{m}_0(x+y) - \hat{m}_0(x)|\, dx \le C|y| \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}.$$

D o w ó d . Niech $c = \operatorname{sgn} y$

$$\begin{aligned} \int |\hat{m}_0(x+y) - \hat{m}_0(x)|\, dx &= \int \Big| \int_0^{|y|} \hat{m}_0'(x+ct)dt \Big| dx \\ &\le \int_0^{|y|} \int |\hat{m}_0'(x+t)| dx\, dt \qquad (6.5) \\ &\le C|y| \|m_0\|_{H_{1/2+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej nierówności zastosowaliśmy poprzedni lemat. □

6.2. Twierdzenie mnożnikowe Hörmandera.

6.6. **Twierdzenie.** *Niech m będzie funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^n$ taką, istnieje $\varepsilon > 0$ że dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(J)$, $J = \{x : 1/2 \le |x| \le 2\}$ istnieje i C i dla każdego $t > 0$ mamy*

$$\|\varphi(\xi) m(t\xi)\|_{H_{n/2+\varepsilon}} \le C.$$

Wówczas $T_m f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)m(\xi))(x)$ jest operatorem ograniczonym na L^p, $1 < p < \infty$, i słabego typu (1.1).

D o w ó d . Przeprowadzimy w przypadku $n = 1$. Niech $\varphi \in C_c^\infty(J)$, będzie taka, że $\sum_j \varphi(2^j \xi) = 1$ dla $\xi \neq 0$. Oznaczmy $m_j(\xi) = m(\xi)\varphi(2^j\xi)$, $n_j(\xi) = m_j(2^{-j}\xi)$. Wówczas na mocy lematów istnieje stała C niezależna od j, że

$$\int |\mathcal{F}^{-1} n_j(\xi)(x)| (1+|x|)^\delta dx \le C,$$

$$\int |\mathcal{F}^{-1} n_j(x+y) - \mathcal{F}^{-1} n_j(x)| dx \le C|y|.$$

Mamy

$$Tf(x) = \sum_j f * \eta_j(x),$$

gdzie $\eta_j(x) = \mathcal{F}^{-1} m_j(x)$. Ponadto $\eta_j(x) = 2^{-j}\zeta_j(2^{-j}x)$, gdzie $\zeta_j(x) = \mathcal{F}^{-1} n_j(x)$.

Zauważmy, że T_m jest ograniczony na L^2. Wystarczy więc udowodnić, stosując powyższe nierówności, że

$$K(x) = \sum_j 2^{-j}\zeta(2^{-j}x)$$

spełnia

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)| dx \le A,$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x+y) - K(x)| dx \le B.$$

Aby udowodnić pierwszą nierówność rozbijamy sumę na dwie: $\sum_{j\geq \log a}$ i $\sum_{j<\log a}$. Do pierwszej stosujemy fakt, że całkujemy po zbiorze o mierze porównywalnej z a funkcje, które są ograniczone prze 2^{-j}. Do drugiej sumy stosujemy fakt, że funkcje całkują pewna wagę.

Aby udowodnić całkowy warunek Höldera rozbijamy sumę na: $\sum_{j\leq \log|y|}$ i $\sum_{j>\log|y|}$. Do pierwszej stosujemy całkowanie wagi a do drugiej udowodniony wcześniej warunek Höldera dla funkcji ζ_j. Szczegóły są ćwiczeniem dla czytelnika. $\square$