[1]

SZEREGI I TRANSFORMATY FOURIERA

JACEK DZIUBAŃSKI

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Wrocław 2009.

[1]Notatki do wykładu prowadzonego w semestrze letnim roku akademickiego 2008/09.

1. Szeregi Fouriera - wprowadzenie

1.1. **Funkcje trygonometryczne. Podstawowe własności.**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{1.1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \tag{1.2}$$

Funkcje sin i cos są okresowe o okresie 2π.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x. \tag{1.3}$$

Funkcja wykładnicza

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.4}$$

Funkcję wykładniczą definiujemy dla $z \in \mathbb{C}$ tym samym bezwzględnie zbieżnym szeregiem

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.5}$$

Ćwiczenie 1.1. *Do samodzielnego sprawdzenia.* Udowodnij, że dla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \tag{1.6}$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z} \tag{1.7}$$

Stąd $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Wstawiając do wzoru (1.5) $z = ix$ mamy

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x. \tag{1.8}$$

Z (1.8) wyprowadzamy wzory Eulera

$$\cos x = \Re e^{ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \Im e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.9}$$

Ćwiczenie 1.2. *Do samodzielnego sprawdzenia.* Sprawdź czy umiesz zastosować (1.6) i (1.9) do wyprowadzenia wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.

1.2. **Wielomiany trygonometryczne.** Mimo, że z punktu widzenia zastosowań w fizyce interesują nas głownie funkcje o wartościach rzeczywistych, jednak z matematycznego punktu widzenia, wygodniej jest rozważać funkcje o wartościach w $\mathbb{C}$.

Wielomianem trygonometrycznym nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big), \tag{1.10}$$

gdzie $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Ćwiczenie 1.3. *Do samodzielnego sprawdzenia.* Udowodnij, że każdy wielomian trygonometryczny można przedstawić w postaci

$$W(x) = \sum_{|k|\leq N} c_k e^{ikx}, \tag{1.11}$$

gdzie $c_k \in \mathbb{C}$. Odwrotnie, każda funkcja postaci (1.11) jest wielomianem trygonometrycznym.

Funkcje postaci (1.11) tworzą algebrę zespoloną samosprzężoną (tj. jeśli W jest elementem algebry, to $\bar{W}$ jest także.

Ćwiczenie 1.4. Funkcje postaci (1.10), gdzie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tworzą algebrę rzeczywistą.

Ćwiczenie 1.5. Udowodnij, że wielomiany trygonometryczne zespolone tworzą zbiór gęsty w zbiorze funkcji ciągłych o wartościach zespolonych okresowych o okresie 2π. Podobnie funkcje postaci (1.10), gdzie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tworzą zbiór gęsty w zbiorze funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych o okresie 2π.

U w a g a 1.12. Zamiast funkcji 2π–okresowych można rozważać funkcje 1–okresowe. Wówczas odpowiednie jednomiany trygonometryczne mają postać $\cos(2k\pi x)$, $\sin(2k\pi x)$, $e^{2k\pi x}$. Przejście od jednych wielomianów do drugich jest jedynie prostą zamianą zmiennych.

1.3. **Motywacja - równanie ciepła.** Rozważmy okrąg o promieniu 1 zrobiony z drutu. W chwili $t_0 = 0$ w każdym punkcie e^{ix} okręgu temperatura drutu wynosi $u_0(x)$. Zakładając, że nie ma wymiany ciepła między drutem i otoczeniem temperatura punktowa drutu będzie się zmieniać w czasie, dążąc do wyrównania. Oznaczmy temperaturę drutu w punkcie e^{ix} w czasie $t \geq 0$ funkcją $u(t, x)$. Spełnia ona równanie ciepła

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \tag{1.13}$$

z warunkiem początkowym $u(0, x) = u_0(x)$ (funkcję u traktujemy jako funkcję okresową zmiennej x). Przyjmijmy, że $c = 1$.

Spróbujmy rozwiązać zagadnienie w przypadku, gdy $u_0(x) = \sin(kx)$. Zauważamy, że funkcja $u(t, x) = e^{-tk^2} \sin(kx)$ jest rozwiązaniem naszego zagadnienia. (Tego, że jest to jedyne rozwiązanie nie będziemy teraz dyskutować).

Ćwiczenie 1.6. Rozwiązać zagadnienie ciepła w przypadku, gdy

$$u_0(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big)$$

jest rzeczywistym wielomianem trygonometrycznym.

Ćwiczenie 1.7. Rozwiązać zagadnienie dla u_0 postaci (1.11).

Idea rozwiązania zagadnienia równania ciepła dla $u_0 \in C(\mathbb{T})$ jest następująca. Przybliżyć u_0 ciągiem wielomianów trygonometrycznych. Rozwiązać zagadnienie dla ciągu przybliżeń. Oczywiście nasuwają się następujące pytania.

1. W jaki sposób dla u_0 znaleźć ciąg W_n przybliżeń wielomianami trygonometrycznymi?

2. Czy ciąg $u_n(t, x)$ rozwiązań równania ciepła z warunkami początkowymi $W_n(x)$ dąży do "czegoś"? Jeśli tak, to czy granica jest rozwiązaniem dla warunku początkowego $u_0(x)$?

1.4. **Reguły ortogonalności.** .

Pytanie. Czy układ funkcji 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n = 1, 2, 3, ...$ na $\mathbb{T}$, jest liniowo niezależny? Podobnie czy układ e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$ jest liniowo niezależny?

Twierdzenie 1.14. *Funkcje* $(2\pi)^{-1/2}e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ *tworzą układ ortonormalny, to jest*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imx}\, dx = \delta_{n,m} \tag{1.15}$$

gdzie $\delta_{n,m} = 1$*, gdy* $m = n$*,* $\delta_{n,m} = 0$ *w przeciwnym wypadku.*

D o w ó d . Dowód pozostawiamy jako proste ćwiczenie. □

Wniosek 1.16. *Funkcje* e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$ *tworzą układ liniowo niezależny.*

Twierdzenie 1.17. *Funkcje* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$, $n = 1, 2, 3, ...$ *tworzą układ ortogonalny na* $\mathbb{T}$*. Są więc liniowo niezależne.*

D o w ó d . Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie □

Z powyższych twierdzeń wynika następująca metoda obliczania współczynników wielomianu trygonometrycznego. Mianowicie, jeśli $W(x)$ jest wielomianem trygonometrycznym, to

$$W(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \tag{1.18}$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(x) e^{-inx}\, dx \tag{1.19}$$

Zauważmy, że w przypadku wielomianu trygonometrycznego powyższa suma ma skończenie wiele składników.

Ćwiczenie 1.8. Podaj wzór na współczynniki wielomianu trygonometrycznego postaci (1.10).

1.5. **Szeregi Fouriera.** Z funkcją ciągłą f 2π–okresową możemy związać szereg funkcyjny

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \tag{1.20}$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx. \tag{1.21}$$

Liczby c_n nazywamy współczynnikami Fouriera i oznaczamy $c_n = \hat{f}(n)$. Przez zbieżność szeregu (Fouriera) (1.20) rozumiemy zbieżność ciągu sum częściowych $\sum_{|n|\le N}\hat{f}(n)e^{inx}$

Naturalnym jest pytanie, dla jakich funkcji f szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny? Jaki jest rodzaj zbieżności (jednostajna, punktowa, ...)? Jeśli tak, to czy f jest granicą tego szeregu?

1.6. **Ćwiczenia.**

Ćwiczenie 1.9. Musisz być oswojony z następującymi wzorami

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^z| = e^{\Re z}$$

Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać jako $z = re^{i\theta}$, gdzie $r > 0$ jest wyznaczone jednoznacznie, θ jest wyznaczone jednoznacznie (mod 2π).

Ćwiczenie 1.10. Udowodnij, że jeśli f klasy C^2 na $\mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$f''(t) + c^2 f(t) = 0,$$

to istnieją stałe a, b, że

$$f(t) = a\cos ct + b\sin ct.$$

Wskazówka. Rozważ funkcje $g(t) = f(t)\cos ct - \frac{1}{c}f'(t)\sin ct$, $h(t) = f(t)\sin ct + \frac{1}{c}f'(t)\cos ct$.

Ćwiczenie 11. Wykaż, że operator Laplace'a

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

we współrzędnych biegunowych wyraża się wzorem

$$\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Ćwiczenie 12. Wyraź współczynniki a_n i b_n poprzez współczynniki c_n we wzorach (1.10) i (1.11).

Ćwiczenie 13. Udowodnij, że dla f 2π–okresowej klasy C^1 mamy $\lim_{n\to\infty}|a_n| + |b_n| = 0$, $\lim_{|n|\to\infty}|c_n| = 0$.

2. Jądro Dirichleta

2.1. **Jądro Dirichleta.** Oznaczmy przez s_n n-tą sumę częściową szeregu Fouriera funkcji f na $\mathbb{T}$

(2.1)
$$s_n(x) = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}e^{ikx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\sum_{|k|\le n} e^{ik(x-t)}\Big)\,dt$$

Oznaczając

$$D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx} \tag{2.2}$$

mamy

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Dla funkcji u, v na $\mathbb{T}$ operację $\int_{-\pi}^{\pi} u(t)v(x-t)\,dt$ nazywamy operacją splotu (lub splotem) i oznaczamy $u * v(x)$. Zatem

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_n(x).$$

Obliczmy sumę skończonego szeregu potęgowego wyznaczającego $D_n(t)$.

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\ &= e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{e^{it}-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $e^{-it/2}$ i stosując wzory Eulera mamy

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \tag{2.4}$$

Zauważmy, że jądro Dirichleta D_n jest funkcją parzystą i ma przedłużenie w zerze do funkcji ciągłej; $D_n(0) = 2n+1$. Ponadto

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\pi \tag{2.5}$$

Ćwiczenie 2.1 Wykaż, że $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx \ge c\ln n$. Niech $0 < c' < c$. Udowodnij, że istnieją funkcje ciągłe f_n, $|f_n| \le 1$, że $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)f(x) \ge c'\ln n$.

Wskazówka. $|D_n(x)| \ge c\frac{\sin((n+1/2)x)}{|x|}$.

Pytanie. Czy szereg Fouriera funkcji ciągłej f jest zbieżny do f? Odpowiedź: nie zawsze. Istnieją funkcje ciągłe których szeregi Fouriera są rozbieżne. Zajmiemy się tym zagadnieniem w dalszej części wykładu.

2.2. **Jednoznaczność szeregu Fouriera.**

Twierdzenie 2.6. *Załóżmy, że f jest funkcją całkowalną taką, że $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas $f(t_0) = 0$ dla wszystkich t_0 będących punktami ciągłości f.*

D o w ó d. Możemy założyć, że f jest funkcją rzeczywistą i $t_0 = 0$, $f(0) = 1$ skonstruujemy rodzinę wielomianów trygonometrycznych $p_k(t)$, że $\int_{-\pi}^{\pi} p_k(t)f(t)\,dt$ jest ciągiem rozbieżnym (z drugiej strony jest to ciąg zerowy na mocy założenia). Z ciągłości f w 0 mamy $f(t) > 0{,}5$ dla $|t| \leq \delta$ dla pewnego $\delta > 0$. Niech

$$p(t) = \varepsilon + \cos t,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest tak małe, że $|p(t)| < 1 - \varepsilon/2$ dla $\delta \leq |t| \leq \pi$. Niech teraz $\delta > \eta > 0$ będzie takie, że $p(t) > 1 + \varepsilon/2$ dla $|t| < \eta$. Niech $p_k(t) = p(t)^k$. Mamy $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_k(t)\,dt = 0$. Z drugiej strony

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_k(t)\,dt = \int_{|t|\leq\eta} f(t)p_k(t)\,dt + \int_{\eta<|t|\leq\delta} f(t)p_k(t)\,dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi} f(t)p_k(t)\,dt.$$

Zauważmy, że pierwszy składnik jest większy od $\eta(1+\varepsilon/2)^k$, drugi jest dodatni, a trzeci dąży do zera. $\square$

Wniosek 2.7. *Jeśli f jest funkcją ciągłą taką, że $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich n, to $f = 0$.*

Wniosek 2.8. *Jeśli f jest funkcją ciągłą taką, że $\sum_n |\hat{f}(n)| < \infty$, to $f(t) = \sum_n \hat{f}(n)e^{int}$.*

Ćwiczenie 2.2 Załóżmy, że f jest klasy C^2 na $\mathbb{T}$. Wówczas $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-2}$. Zatem jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny. Jak zachowują się współczynniki Fouriera funkcji klasy C^k?

Ćwiczenie 2.3. Rozważmy funkcję nieparzystą f na $[-\pi, \pi]$ zdefiniowaną dla $t > 0$ wzorem $f(t) = t(\pi - t)$. Naszkicuj wykres f. Oblicz jej szereg Fouriera. Czy jest on zbieżny? Do czego?

Ćwiczenie 2.4. To samo dla funkcji $f(t) = 0$ dla $|t| > \delta$, $f(t) = 1 - |t|/\delta$ dla $|t| \leq \delta$.

Ćwiczenie 2.5. Wykaż, że

$$\sum_{n\geq 1 \text{ } nieparzyste} \frac{1}{n^2} = \pi^2/8,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6.$$

W tym celu rozważ jak w poprzednich ćwiczeniach funkcje $f(t) = |t|$. Oblicz jej współczynniki Fouriera. Zapisz szereg w postaci sin i cos. Do czego on dąży? Podstaw $t = 0$.

Ćwiczenie 2.6. Załóżmy, że f, g, h są 2π–okresowe i całkowalne. Wówczas

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$
$$(cf) * g = c(f * g) = f * (cfg)$$
$$f * g = g * f$$
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$
$$f * g \text{ jest funkcją ciągłą dla } f, g \in L^2$$
$$\widehat{f * g}(n) = 2\pi \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

Ćwiczenie 2.7. Rozwiąż równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ na pasie

$$S = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y\}$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

$$u(0, y) = 0 \quad \text{dla } 0 \le y$$
$$u(1, y) = 0 \quad \text{dla } 0 \le y$$
$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } 0 \le x \le 1$$

gdzie f jest daną funkcją $f(0) = f(1) = 0$.

Wskazówka. Napisz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$. Rozwiąż zagadnienie dla $f_n = \sin(n\pi x)$.

Ćwiczenie 2.8. Jądro Poissona. Rozwiąż zagadnienie Dirichleta na dysku jednostkowym $D = \{|(x, y)| < 1\}$ dla danej funkcji f na brzegu. To znaczy znajdź funkcję $F(x, y)$ na D harmoniczną w D, tj. $\Delta F = 0$ i równą f na brzegu. Załóż na początku, że f jest bardzo regularna.

Wskazówka. Funkcje $r^{|n|}e^{int}$ są harmoniczne (współrzędne biegunowe – ćwiczenie 1.11). Rozwiązuje ona zagadnienie Dirichleta z funkcjami brzegowymi e^{int}. Rozwiń funkcję brzegową w szereg Fouriera.

Przedstaw rozwiązanie w postaci $F(r, \theta) = c \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(\theta - t, r)\, dt$. Wylicz funkcje P. Nosi ona nazwę jądra Poissona.

3. Równość Parsevala i najlepsza aproksymacja.

3.1. **Iloczyn skalarny.** Zakładamy, że pojęcie iloczynu skalarngo i normy zdefiniowanej przez iloczyn skalarny jest znane.

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$. Mówimy, że wektory e_j tworzą układ ortonormalny, gdy $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$, $\|e_j\|^2 = \langle e_j, e_j\rangle = 1$.

Ćwiczenie 3.1. Udowodnij nierówność Schwarza

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

Twierdzenie 3.1. *Niech e_n będzie układem ortonormalnym w przestrzeni $\mathcal{H}$ z iloczynem skalarnym $\langle x, y\rangle$. Dla ustalonego x niech $c_m = \langle x, e_n\rangle$. Niech*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} c_m e_n$$

i niech

$$t_n = \sum_{m=1}^{n} a_m e_m.$$

Wówczas

$$\|x - s_n\|^2 \leq \|x - t_n\|^2.$$

Ponadto równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $c_m = a_m$.

D o w ó d.

$$\langle x, t_n \rangle = \sum_{m=1}^{n} c_m \bar{a}_m.$$

$$\|t_n\|^2 = \sum_{m=1}^{n} |a_m|^2.$$

Z ortonormalności układu mamy

$$\|x-t_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum c_m \bar{a}_m - \sum \bar{c}_m a_m + \|t_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum |c_m|^2 + \sum |a_m - c_m|^2.$$

Ostatnie wyrażenie osiąga minimum, gdy $a_m = c_m$. Jeśli podstawimy $a_m = c_m$, to otrzymamy tezę. Ponadto mamy

$$\sum_{m=1}^{n} |c_m|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ostatnia nierówność nosi nazwę nierówności Bessela. □

Wniosek 3.2. *Jeśli układ ortonormalny* e_j *jest liniowo gęsty, to znaczy kombinacje liniowe* e_j *tworzą zbiór gęsty w* $\mathcal{H}$, *to*

$$\|x\|^2 = \sum_j |c_j|^2. \tag{3.3}$$

Równość ta nosi nazwę równości Parsevala. Przestrzeń zupełna z iloczynem skalarnym nosi nazwę *przestrzeni Hilberta*. Układ ortonormalny liniowo gęsty nosi nazwę bazy Hilbertowskiej lub krótko bazy (nie mylić z bazą liniową).

D o w ó d. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\|x - \sum_{j=1}^{N} a_j e_j\| < \varepsilon$. Wówczas

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} c_j e_j \right\| \leq \|x - \sum_{j=1}^{N} a_j e_j\| < \varepsilon.$$

Stąd

$$0 \leq \|x - \sum_{j=1}^{N} c_j e_j\| = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |c_m|^2 < \varepsilon.$$

□

Ćwiczenie 3.2. Równość Parsevala dla szeregów Fouriera. Jeśli $f \in L^2(-\pi,\pi)$, (dla studentów nie znających całki Lebesgue'a można założyć, że f jest funkcją ciągłą) mamy

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-\sum_{|n|<N}\hat{f}(n)e^{int}|^2\,dt=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2,$$

gdzie $\hat{f}(n)$ są zadane przez (1.21).

Wniosek 3.4. Lemat Riemanna-Lebesgue'a *Jeśli f jest funkcją całkowalną na $\mathbb{T}$, to* $\lim_{|n|\to\infty}\hat{f}(n)=0$.

D o w ó d . Dla słuchaczy nieznających całki Lebesgue'a. Niech f będzie funkcją ograniczoną całkowalną. Wówczas $\sum_n|\hat{f}(n)|^2=C\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt$. Stąd wynika lemat.

Dla studentów znających całkę Lebesgue'a. Niech $f\in L^1(\mathbb{T})$. Ustalmy $\varepsilon>0$. I niech $g\in C(\mathbb{T})$ będzie taka, że $\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|\,dt\le\varepsilon$. Wówczas $|\hat{g}(n)|<\varepsilon$ dla $|n|>N_\varepsilon$. Ponadto, $|\hat{f}(n)-\hat{g}(n)|\le C\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|\,dt<C\varepsilon$. Stąd teza. □

Ćwiczenie 3.3. Zastosuj równość Parsevala i funkcje $f(t)=|t|$ do obliczenia sum $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-4}$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$.

Ćwiczenie 3.4. Udowodnij, że $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$. Wskazówka. Zastosuj wzór na jądro Dirichleta i zauważ, że funkcja $\frac{1}{\sin t/2}-\frac{2}{t}$ jest ciągła na $(-\pi,\pi)$.

Ćwiczenie 3.5. Udowodnij, że jeśli f jest funkcją całkowalną ograniczoną mającą pochodną w t_0, to jej szereg Fouriera zbiega do niej w t_0.

Wskazówka. Niech $t_0=0$. Zapisz

$$s_n(0)-f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(-t)-f(0))D_n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(t)tD_n(t)\,dt$$

dla,pewnej funkcji G, jakiej?.

4. Jądro Fejera.

4.1. **Średnie Cesaro.** Niech $c_0+c_1+c_2+...=\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ będzie szeregiem liczbowym. Niech $s_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$ będzie sumą częściową. Zbieżność szeregu to zbieżność s_n. Zauważmy, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ jest szeregiem rozbieżnym. Sumy częściowe tworzą ciąg 1,0,1,0,1,... Ktoś może "intuicyjnie"powiedzieć, że "granicą"tych liczb jest $\frac{1}{2}$. Nadajmy temu precyzyjny sens. Rozważmy średnie arytmetyczne sum częściowych

$$\sigma_N=\frac{s_0+s_1+...+s_{N-1}}{N}.$$

Jeśli szereg σ_N jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum c_n$ jest sumowalny metodą Cesaro.

Ćwiczenie 4.0. Zbadaj sumowalność metodą Cesaro szeregu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$

4.2. **Jądro Fejera.** Rozważmy średnią arytmetyczną jąder Dirichleta

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

K_n nosi nazwę jądra Fejera.

Twierdzenie 4.1.

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}$$

D o w ó d. Zauważmy, że $(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Stąd

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = \sum_{m=1}^{n}(e^{i(m+1)x}-e^{-imx})(e^{-inx}-1) = 2-e^{i(n+1)x}-e^{-(n+1)x}.$$

Ostatecznie

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{2-2\cos(n+1)x}{2-2\cos x}.$$

□

Wniosek 4.2. *$K_n(x) \geq 0$ oraz $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 2\pi$.*

Ćwiczenie 4.1. Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon<|x|<\pi} K_n(x)\,dx = 0.$$

Twierdzenie 4.3. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną całkowalną ciągłą w t_0, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi} f * K_n(t_0) = f(t_0).$$

D o w ó d. Zostawiamy jako **Ćwiczenie 4.2.** Zastosuj wskazówkę z ćwiczenia 3.5. □

Wniosek 4.4. *Jeśli f jest funkcją ciągłą 2π okresową, to $\frac{1}{2\pi} f * K_n$ dąży do f jednostajnie.*

Jest to przepis na przybliżanie funkcji ciągłych wielomianami trygonometryczny.

Oznacza to, że szereg Fouriera $\sum_n \hat{f}(n)e^{int}$ funkcji f (ograniczonej) jest sumowalny metodą Cesaro do f w punktach ciągłości.

Ćwiczenie 4.2. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ są ciągami liczb zespolonych. Niech $B_k = \sum_{n=1}^{k} b_k$, $(B_0 = 0)$.

a) Udowodnij wzór na sumowanie przez części

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1}-a_n)B_n.$$

b) Wywnioskuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregu: jeśli sumy częściowe szeregu $\sum b_n$ są ograniczone, a a_n maleje monotonicznie do zera, to $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Ćwiczenie 4.3. Niech $f(x) = (\pi - x)/2$ dla $0 < x < \pi$ będzie funkcją nieparzystą 2π okresową. Wyznacz jej szereg Fouriera. Udowodnij, że jest on zbieżny w każdym punkcie, mimo, że funkcja nie jest ciągła.

Ćwiczenie 4.4. Udowodnij, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \frac{1}{2\pi} f * K_n(t)|^2 \, dt \to 0$$

dla funkcji $f \in L^2$ przy $n \to \infty$.

5. Jądro Poissona.

5.1. **Średnie Abela.** Dla szeregu liczbowego $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ i $0 \leq r < 1$ rozważamy sumę

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k.$$

Nosi ona nazwę średniej Abela. Mówimy, że szereg jest sumowalny metodą Abela, gdy granica

$$\lim_{r \to 1} A(r) = s$$

istnieje.

Ćwiczenie 5.1. Wykaż, że szereg $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$ jest sumowalny metodą Abela, a nie jest sumowalny metodą Cesaro.

Można wykazać, że zbieżność pociąga sumowalność w sensie Cesaro, sumowalność w sensie Cesaro pociąga sumowalność w sensie Abela.

5.2. **Jądro Poissona.** Rozważmy szereg Fouriera funkcji f

$$f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

Zdefiniujmy średnie Abela

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{in\theta}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt \Big) e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(t-\theta)} \Big) \, dt \end{aligned} \tag{5.1}$$

Zdefiniujmy jądro Poissona wzorem

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Wówczas

$$A_r(f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} f * P_r(\theta).$$

Twierdzenie 5.2.

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Dowód. **Ćwiczenie 5.2.** □

Ćwiczenie 5.3. Wykaż, że $P_r > 0$ i $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 2\pi$.

Ćwiczenie 5.4. Wykaż, że dla każdego $\delta > 0$ mamy

$$\lim_{r\to 1} \int_{\delta<|t|<\pi} P_r(t)\,dt = 0.$$

Wniosek 5.3. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną, to*

$$A_r(f)(t_0) \to f(t_0)$$

dla t_0 będącego punktem ciągłości f.

Dowód. **Ćwiczenie 5.5.** □

Twierdzenie 5.4. *Dla funkcji f, g całkowalnych ograniczonych w sensie Riemanna na $\mathbb{T}$ ($L^2(\mathbb{T})$ w sensie Lebesgue'a) mamy*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = 2\pi \sum_n \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.$$

Dowód. Dowód wynika z następującej równości dla iloczynu skalarnego (zespolonego)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

oraz z równości Parsevala. □

Nie każdy zbieżny szereg trygonometryczny jest szeregiem Fouriera funkcji ograniczonej całkowalnej w sensie Riemanna (ćwiczenie 5.19). Podamy teraz inny przykład szeregu trygonometrycznego nie będącego szeregiem Fouriera funkcji ograniczonej całkowalnej.

Niech $f(t)$ będzie funkcją nieparzystą na $[-\pi, \pi]$ równą $i(\pi - t)$ dla $t > 0$. Wiadomo, że jej szeregiem Fouriera jest

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{int}}{n}.$$

Rozważmy szereg

$$\sum_{n<0} \frac{e^{int}}{n}.$$

Współczynniki Fouriera szeregu są sumowalne z kwadratem. Gdyby szereg ten był szeregiem Fouriera funkcji ograniczonej g, to

$$A_r(g)(0) = \sum_{n<0} \frac{r^{|n|}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n},$$

który rozbiega do $-\infty$ przy $r \to 1^-$. Z drugiej strony

$$|A_r(g)(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|P_r(t)\,dt| \le \sup_t |g(t)|.$$

Ćwiczenie 5.6. Niech $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ będzie funkcją charakterystyczną odcinka $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$.

a) Znajdź szereg Fouriera funkcji f.

b) Wykaż, że jeśli $a \neq \pi$ lub $b \neq \pi$ i $a \neq b$, to szereg ten nie zbiega absolutnie w żadnym punkcie x.

c) Wykaż, że szereg zbiega w każdym punkcie.

Ćwiczenie 5.7. Stosując lemat R-L wykaż, że dla funkcji f klasy C^k $2\pi-$okresowej mamy $|\hat{f}(n) = o(|n|^{-k})$, tj. $|\hat{f}(n)|n|^k \to 0$, gdy $|n| \to \infty$. Jest to wzmocnienie udowodnionego juz na ćwiczeniach faktu $|\hat{f}(n) = O(|n|^{-k})$, tj. $|\hat{f}(n)|n|^k$ jest ograniczone.

5.8. Niech f, f_k będzie ciągiem funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na $[-\pi,\pi]$ takim, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x) - f(x)|\,dx \to 0$$

przy $k \to \infty$. Wykaż, że $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ jednostajnie względem n przy $k \to \infty$.

5.9. Udowodnij, że jeśli $\sum c_n$ zbiega do s, to jest zbieżny w sensie Cesaro do s.

5.10. Udowodnij, że jeśli $\sum c_k$ zbiega do $s \in \mathbb{R}$, to $\sum c_n$ jest sumowalny w sensie Abela do s.

Wskazówka: Załóż, że $s = 0$ Dlaczego to wystarczy? Zastosuj wzór na sumowanie przez części.

5.11. Jaka jest suma metodą Abela szeregu $\sum(-1)^n$?

5.12. Udowodnij, że jeśli $\sum c_n$ jest sumowalny w sensie Cesaro do s, to jest sumowalny w sensie Abela do s.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n r^n$. Załóż $\sigma = 0$.

5.13. Wykaż, że szereg $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ jest sumowalny w sensie Abela, a nie jest sumowalny w sensie Cesaro.

Wykażemy w ten sposób, że

$$\text{sumowalność} \implies \text{Cesaro} \implies \text{Abel}$$

i że strzałek nie można odwrócić.

Ćwiczenie 5.13. Poniższe twierdzenie Taubera mówi, że przy dodatkowych założeniach strzałki można odwrócić.

a) Jeśli $\sum c_n$ jest sumowalny metodą Cesaro do σ i $c_n = o(n^{-1})$, to $\sum c_k$ jest sumowalny do σ.

Wskazówka: $s_n - \sigma_n = [(n-1)c_n + \ldots + c_2]/n$.

b) Przy powyższych założeniach wykazać, że sumowalność w sensie Abela pociąga sumowalność.

Wskazówka: Oszacować różnicę $\sum_{n=1}^N c_n$ i $\sum_{n=1}^N c_n r^n$, gdzie $r = 1 - 1/N$.

5.14. Udowodnij, że jeśli f ograniczona i całkowalna ma granice jednostronne w t_0, to $\frac{1}{2\pi} f * P_r(t_0)$ zbiega do średniej arytmetycznej granic. To samo dla $\frac{1}{2\pi} f * K_r(t_0)$

5.15. Naśladując dowód z wykładu ćwiczenia 3.5 udowodnij, że teza pozostaje prawdziwa, jeśli założymy, że f spełnia warunek Lipschitza w t_0 tj. $f(t) - f(t_0)| \leq M|t - t_0|$.

5.16. Udowodnij, że przestrzeń $l^2(\mathbb{Z})$ jest zupełna.

5.17. Skonstruuj ciąg funkcji f_k ograniczonych i całkowalnych takich, że

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_k|^2 = 0,$$

ale $\lim_{k\to\infty} f_k(t)$ nie istnieje dla każdego t.

5.18. Niech $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ będzie równe $a_k = k^{-1}$ dla $k > 0$; $a_k = 0$ dla $k \leq 0$. Mamy $\{a_k\} \in l^2$. Wykaż, że nie ma funkcji f całkowalnej w sensie Riemanna i ograniczonej takiej, że $a_k = \hat{f}(k)$.

5.19. Wykaż, że $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n} \sin nx$ zbiega dla każdego x, ale szereg ten nie jest szeregiem Fouriera funkcji ograniczonej całkowalnej w sensie Riemanna.

5.20. Wykaż, że szereg Fouriera funkcji $f \in C^1(\mathbb{T})$ jest bezwzględnie zbieżny.

Wskazówka: Zastosuj nierówność Cauchy'go-Schwarza i równość Parsevala do f'.

5.20. Niech f będzie $2\pi-$ okresowa i całkowalną w sensie Riemanna na $[-\pi, \pi]$. Wykaż, że

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \frac{\pi}{n}) e^{-inx}\, dx.$$

Wywnioskuj, że

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] e^{-inx}\, dx.$$

b) Załóż, że f spełnia $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ dla pewnej stałej $0 < \alpha \leq 1$ i $C > 0$. Wykaż, że

$$\hat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha}).$$

5.21. Załóż, że w poprzednim zadaniu $\alpha = 1$. Wówczas $\hat{f}(n) = O(|n|^{-1})$ i nic nie możemy na razie powiedzieć o zbieżności bezwzględnej szeregu Fouriera.

a) Dla $h > 0$ zdefiniujmy $g_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0\infty} |g_h|^2 = \sum_n 4|\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2.$$

Następnie udowodnij

$$\sum |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leq K^2 h^2.$$

b) Niech $p \in \mathbb{N}$. Niech $h = \pi/2^{p+1}$. Wykaż, że

$$\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

c) Oszacuj $\sum_{2^{p-1}<|n|\leq 2^p} |\hat{f}(n)|$ i wywnioskuj, że szereg Fouriera jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Wskazówka: Nierówność Schwarza.

6. Zastosowania szeregów Fouriera.

6.1. **Nierówność izoperymetryczna.** Problem: znaleźć zamkniętą krzywą na płaszczyźnie o zadanej długości (powiedzmy 2π) ograniczającą obszar o największym polu. Rozwiążemy ten problem przy dodatkowych założeniach na krzywą. Założenia:

krzywa nie ma samoprzecięć,

krzywa jest klasy C^1.

Niech $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ będzie parametryzacją krzywej. Można założyć (bez straty ogólności) że $|\gamma'(s)| = 1$. Wówczas za zbiór parametrów s możemy przyjąć $[0, 2\pi]$.

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Niech A będzie polem obszaru ograniczonego krzywą spełniającą powyższe założenia. Wówczas $A \leq \pi$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy γ jest okręgiem o promieniu 1.*

Dowód. Mamy $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Z twierdzenia Greena dla całek krzywoliniowy mamy

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\,ds\right|.$$

Niech $x(s) \sim \sum a_n e^{ins}$, $y(s) \sim \sum b_n e^{ins}$ będą szeregami Fouriera. Wówczas $x'(s) \sim \sum a_n ine^{ins}$, $y'(s) \sim \sum b_n ine^{ins}$ są szeregami pochodnych. Z równości Parsevala mamy

$$A = \pi|\sum_n n(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n})|,$$

$$\sum_n |n|^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1.$$

Zauważmy, że

$$|a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}| \leq 2|a_n||b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2. \tag{6.2}$$

Ponieważ $|n| \leq |n|^2$ (równość jedynie dla $n = -1, 0, 1$) mamy

$$A \leq \pi\sum_n |n|^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \pi.$$

Jeśli $A = \pi$, to

$$x(s) = a_{-1}e^{-is} + a_0 + a_1e^{is}, \quad y(s) = b_{-1}e^{-is} + b_0 + b_1e^{is},$$

bo $|n| < |n|^2$ dla $|n| > 1$. Ponadto funkcje $x(s)$,$y(s)$ są rzeczywiste. Zatem $a_{-1} = \overline{a_1}$, $b_{-1} = \overline{b_1}$. Więc $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$. Ponadto w nierównościach (6.2) mamy równości. Co daje $|a_1|^2 = |b_1|^2 = \frac{1}{4}$. Czyli

$$a_1 = \frac{e^{i\alpha}}{2}, \qquad b_1 = \frac{e^{i\beta}}{2}.$$

Z tego, że $1 = 2|a_1\overline{b_1} - b_1\overline{a_1}|$ wynika $|\sin(\alpha-\beta)| = 1$, czyli $\alpha - \beta = k\pi + \pi/2$. Ostatecznie

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s), \quad y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s).$$

$\square$

Uzupełnienia.

6.2. **Całka Stiltjesa po przedziałach domkniętych.** Niech α będzie funkcją niemalejącą na $[a,b]$. Dla funkcji ograniczonej f na $[a,b]$ i podziału P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ wprowadzamy sumę górną i dolną wzorem

$$\underline{S}(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta\alpha_i,$$

$$\overline{S}(f,\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta\alpha_i,$$

gdzie $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $\quad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. Jeśli P' jest zagęszczeniem podziału P, to

$$\underline{S}(f,\alpha,P) \le \underline{S}(f,\alpha,P') \le \overline{S}(f,\alpha,P') \le \overline{S}(f,\alpha,P).$$

Funkcja f jest całkowalna w sensie Stiltjesa, gdy supremum sum dolnych jest równe infimum sum górnych. Wówczas wielkość tę oznaczamy przez $\int_a^b f d\alpha$, lub $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$.

Lemat 6.3. *Jeśli f ciągła α niemalejąca, to f całkowalna w sensie Stiltjesa.*

Lemat 6.4. (wzór na całkowanie przez części) *Jeśli f klasy C^1 na $[a,b]$ i α niemalejąca, to*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f'(x)\alpha(x)\,dx.$$

D o w ó d. Niech P będzie podziałem przybliżającym całkę $\int_a^b f\,d\alpha$. Mamy

(6.5)

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,d\alpha &\sim \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))\\ &= f(x_{n-1})\alpha(x_n) - f(x_0)\alpha(x_0)\\ &\quad - \Big(\alpha(x_1)(f(x_1) - f(x_0)) + \alpha(x_2)(f(x_2) - f(x_1))\\ &\quad + \alpha(x_3)(f(x_3) - f(x_2)) + ... + \alpha(x_{n-1})f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\Big)\\ &= f(x_{n-1})\alpha(x_n) - f(x_0)\alpha(x_0)\\ &\quad - \Big(\alpha(x_1)f'(\xi_1)\Delta x_1 + \alpha(x_2)f'(\xi_2)\Delta x_2 + ... + \alpha(x_{n-1})f'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}\Big)\\ &\sim f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f'(x)\alpha(x)\,dx.\end{aligned}$$

o ile podział P jest wystarczająco gęsty. $\square$

Lemat 6.6. (drugie twierdzenie o wartości średniej) *Jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ a $\alpha(x)$ niemalejącą na $[a,b]$, to istnieje $c \in [a,b]$, że*

$$\int_a^b f(x)\alpha(x)\,dx = \alpha(b-)\int_c^b f(x)\,dx + \alpha(a+)\int_a^c f(x)\,dx.$$

D o w ó d. Niech $a_n,\ b_n \in (a,b)$ będą takie, że $a_n \to a$, $b_n \to b$. Wówczas $\int_a^b f(x)\alpha(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\alpha(x)\,dx$. Niech $F(x)$ będzie funkcja pierwotną do F. F jest klasy C^1. Stosując wzór na całkowanie przez części mamy

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} f(x)\alpha(x)\,dx &= \int_{a_n}^{b_n} F'(x)\alpha(x)\,dx \\
& F(b_n)\alpha(b_n) - F(a_n)\alpha(a_n) - \int_{a_n}^{b_n} F(x)d\alpha(x) \\
&= F(b_n)\alpha(b_n) - F(a_n)\alpha(a_n) - F(c_n)\int_{a_n}^{b_n} d\alpha(x) \qquad (6.7)\\
&= F(b_n)\alpha(b_n) - F(a_n)\alpha(a_n) - F(c_n)(\alpha(b_n) - \alpha(a_n)) \\
&= \alpha(a_n)(F(c_n) - F(a_n)) + \alpha(b_n)(F(b_n) - F(c_n)) \\
&= \alpha(a_n)\int_{a_n}^{c_n} f(t)\,dt + \alpha(b_n)\int_{c_n}^{b_n} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

W drugiej równości istnienie $c_n \in [a_n, b_n]$ wynika z z twierdzenia o wartości średniej. Przechodząc ewentualnie do podciągu możemy przyjąć, że c_n zbiega do $c \in [a,b]$ i otrzymujemy tezę. $\square$

6.3. **Funkcje klasy C^∞ o nośniku zwartym.**

Lemat 6.8. *Niech $f(x) = e^{-x^{-2}}$ dla $x \neq 0$ $f(0) = 0$. Wówczas f jest funkcja klasy C^∞ taką że $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2....$*

Lemat 6.9. *Niech $g(x) = 0$ dla $x \leq 0$, $g(x) = e^{-x^2}$ dla $x > 0$. Wówczas $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Lemat 6.10. *Niech $h(x) = g(x)g(1-x)$, gdzie g jest z poprzedniego lematu. Wówczas $h \in C_c^\infty$, nośnik h wynosi $[0,1]$, $h \geq 0$.*

Lemat 6.11. *Niech $\phi(x) = \int_{-\infty}^x h(t)\,dt$, gdzie h jest z poprzedniego lematu. Wówczas $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(x) = 0$ dla $x \leq 0$, $\phi(x) = c > 0$ dla $x \geq 1$, $\phi(x) \neq 0$ dla $x \in (0,1)$.*

Lemat 6.12. *Niech $\phi^t(x) = \phi(tx)$, $t > 0$. Wówczas ϕ^t jest klasy C^∞, $\phi^t(x) = 0$ dla $x \leq 0$, $\phi^t(x) = c > 0$ dla $x \geq 1/t$, $\phi^t \geq 0$.*

Wniosek 6.13. *Dla każdego przedziału $[a,b]$ i $\delta > 0$ (małego) istnieje funkcja $\psi \in C_c^\infty$ taka, że $\psi \geq 1$ $\operatorname{supp}\psi \subset [a,b]$, $\psi = 0$ na $[a+\delta, b-\delta]$.*

6.4. Rozważania dotyczące gęstości wielomianów trygonometrycznych w przestrzeniach $L^p(-\pi,\pi)$.

Lemat 6.14. *Jeśli $f \in L^1(-\pi,\pi)$ i $\hat{f}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, , to $f = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $\hat{f}(n) = 0$ dla wszystkich n. Jeśli $\|f\|_{L^1} \neq 0$, to istnieje funkcja g - ciągła i 2π-okresowa, że $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \neq 0$. Ale wielomiany trygonometryczne $W_n = \frac{1}{2\pi} g * K_n$ przybliżają jednostajnie g. Zatem

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(x)f(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} gf \neq 0,$$

uzyskujemy sprzeczność. □

Lemat 6.15. *Układ $\frac{1}{2\pi}e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, jest zupełny w $L^2(-\pi,\pi)$, lub inaczej wielomiany trygonometryczne leża gęsto w L^2.*

Dowód. Niech $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Niech $s_n(x) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ będzie sumą częściową szeregu Fouriera. Wiemy, że s_n zbiega w L^2 do funkcji g. Zatem zbieżność, na mocy nierówności Schwarza jest także w L^1. Zatem $\hat{g}(k) = \lim_n \hat{s}_n(k) = \hat{f}(k)$. Zatem $f - g$ jest funkcją w L^1 o znikających współczynnikach Fouriera. Zatem $f = g$. Co daje, że wielomiany trygonometryczne s_n zbiegają do f w L^2. □

Lemat 6.16. *Wielomiany trygonometryczne leżą gęsto w $L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leq p < \infty$.*

Dowód. Udowodnimy dla $p = 1$. Niech $f \in L^1$. Wówczas $f_N = f(x)$ jeśli $|f(x)| < N$, $f_N(x) = 0$ jeśli $|f(x)| \geq N$ są w L^2 i $f_n \to f$ w L^1. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech f_N takie, że $\|f - f_N\|_{L^1} < \varepsilon$. Wybierzmy taki wielomian trygonometryczny W aby $\|W - f_N\|_{L^2} < \varepsilon$. Wtedy $\|f - W\|_{L^1} \leq \|f - f_N\|_{L^1} + \|f_N - W\|_{L^1} \leq \varepsilon + \|f_N - W\|_{L^1} \leq \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon$ □

6.5. Istnienie funkcji ciągłej o rozbieżnym szeregu Fouriera.

Niech $q = 999/1000$. Niech n_k będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wiemy, że $\|D_n\| \geq c \ln n$. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech f_k będzie funkcją ciągłą 2π-okresową, że $\|f_k\|_\infty \leq 1$ i

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_k D_{n_k} \geq q\|D_{n_k}\|_{L^1}.$$

Określmy ciąg $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, tak aby

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f_1 + \frac{\varepsilon_2}{4^2}f_2 + \frac{\varepsilon_3}{4^3}f_3 + ... + \frac{\varepsilon_k}{4^k}f_k)D_{n_1}\right| \geq (q - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - ... - \frac{1}{4^k})\|D_{n_1}\|_{L^1},$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f_1+\frac{\varepsilon_2}{4^2}f_2+\frac{\varepsilon_3}{4^3}f_3+...+\frac{\varepsilon_k}{4^k}f_k)D_{n_2}\right| \geq (\frac{q}{4^2}-\frac{1}{4^3}-...-\frac{1}{4^k})\|D_{n_2}\|_{L^1},$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f_1+\frac{\varepsilon_2}{4^2}f_2+\frac{\varepsilon_3}{4^3}f_3+...+\frac{\varepsilon_k}{4^k}f_k)D_{n_3}\right| \geq (\frac{q}{4^3}-\frac{1}{4^4}-...-\frac{1}{4^k})\|D_{n_3}\|_{L^1},$$

....

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f_1+\frac{\varepsilon_2}{4^2}f_2+\frac{\varepsilon_3}{4^3}f_3+...+\frac{\varepsilon_k}{4^k}f_k)D_{n_k}\right| \geq \frac{q}{4^k}\|D_{n_k}\|_{L^1}.$$

Szereg funkcyjny $f_1+\frac{\varepsilon_2}{4^2}f_2+\frac{\varepsilon_3}{4^3}f_3+...+\frac{\varepsilon_k}{4^k}f_k$ jest sumowalny jednostajnie do funkcji ciągłej f. Mamy

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_{n_k}(x)\,dx\right| \leq c_k\|D_{n_k}\|_{L^1},$$

gdzie $c_k = \frac{q}{4^k}-\frac{1}{4^{k+1}}-\frac{1}{4^{k+2}}-... > 0$. Dobieramy teraz ciąg n_k takie, aby $c_k\|D_{n_k}\|_{L^1}\to\infty$.

7. Elementarna teoria transformacji Fouriera w $\mathbb{R}$

7.1. **Funkcje całkowalne na $\mathbb{R}$.** Studenci znający całkę Lebesgue'a mogą przyjąć, że występujące w tym rozdziale funkcje należą do $L^1(\mathbb{R})$. Z uwagi, że większość słuchaczy nie zna jedynie teorię całki Riemanna, musimy dokonać pewnych ograniczeń na funkcje, tak aby uniknąć problemów definicyjnych związanych że zbieżnościami całek.

Mówimy, że funkcja f ma umiarkowane malenie, jeśli jest kawałkami ciągła, całkowalne na każdym przedziale $[a,b]$ i istnieją stałe $\varepsilon>0$ and A takie, że

$$|f(x)| \leq \frac{A}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}. \tag{7.1}$$

Klasę tych funkcji oznaczać będziemy przez $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Tworzy ona przestrzeń wektorową. Ponadto jest niezmiennicza na dylatacje $f(tx)$.

Ćwiczenie 7.1. Wykaż, że dla funkcji $f\in\mathcal{M}$ granice

$$\lim_{N,M\to\infty}\int_{-M}^{N} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{N,M\to\infty}\int_{-M}^{N} |f(x)|\,dx$$

istnieją. Granice te będziemy oznaczać odpowiednio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 7.2. *Dla funkcji $f,g\in\mathcal{M}$ mamy*

$$\int_{\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(xy)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$\delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad \delta > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|\,dx \to 0 \ \ \textit{przy } y \to 0$$

$$f * g \in \mathcal{M}, \ \textit{gdzie} \ \ f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Operacja $f * g$ nosi nazwę operacji splotu.

D o w ó d . Dowody pierwszych czterech własności zostawiamy jako **Ćwiczenie 7.2.** Przy dowodzie własności czwartej załóż, że f jest funkcją ciągłą (dowód w pełnej ogólności wymaga dość subtelnych argumentów). Aby dowieść własność piątą załóżmy, że f spełnia (7.1) z wykładnikiem ε_1 a g z ε_2. Niech $0 < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Wówczas

$$\begin{aligned} |f*g(x)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \\ &\le C\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x-y|)^{-1-\varepsilon}(1+|y|)^{-1-\varepsilon}\,dy \qquad (7.3) \\ &\le C\int_{|x-y|<|x|/2} ... + C\int_{|x-y|\ge|x|/2} ... \le C'(1+|x|)^{-1-\varepsilon} \end{aligned}$$

□

7.2. **Definicja transformacji Fouriera na $\mathbb{R}$.** Dla $f \in \mathcal{M}$ definiujemy transformacje Fouriera funkcji f w punkcie ξ wzorem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

Ćwiczenie 7.2. Wykaż, że $f \mapsto \hat{f}$, jest odwzorowaniem liniowym oraz

$$\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Twierdzenie 7.4. *Jeśli $f \in \mathcal{M}$, to $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą.*

D o w ó d . Ustalmy $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że f spełnia (7.1) z wykładnikiem $\delta > 0$. Wówczas istnieje $N > 0$ takie, że

$$\left|\int_{|x|>N} f(x)e^{2\pi i x\xi}\,dx\right| \le \left|\int_{|x|>N} |f(x)|\,dx \le \varepsilon.$$

Dalej

$$\left|\int_{|x|<N} f(x)(e^{2\pi i x\xi} - e^{2\pi i x\xi'})\,dx\right| \le C\int_{|x|<N} |e^{2\pi i x\xi} - e^{2\pi i x\xi'}|\,dx \to 0$$

przy $\xi' \to \xi$. □

7.3. **Klasa Schwartza na $\mathbb{R}$.** Klasą Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nazywamy zbiór funkcji f klasy C^∞ na $\mathbb{R}$ takich, że dla każdych liczb całkowitych $l, k \geq 0$ mamy

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k|f^{(l)}(x)| < \infty.$$

Są to funkcje które maleją wraz z wszystkimi pochodnymi szybciej niż odwrotność każdego wielomianu.

Ćwiczenie 7.3. Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to $f'(x)$, $xf(x)$, $f(x-h)$ także są w tej klasie.

Ćwiczenie 7.4. Klasa $\mathcal{S}$ tworzy algebrę (mnożenie punktowe funkcji).

Ćwiczenie 7.5. Funkcja $f(x) = e^{-|x|^2}$ jest elementem $\mathcal{S}$.

Twierdzenie 7.5. *Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to*

(i) transformacją Fouriera funkcji $f(x+h)$ jest $\hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi}$

(ii) transformacją Fouriera funkcji $f(x)e^{-2\pi ixh}$ jest $\hat{f}(\xi+h)$

(iii) transformacją Fouriera funkcji $f(\delta x)$ jest $\delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$

(iv) transformacją Fouriera funkcji $f'(x)$ jest $2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$

(v) transformacją Fouriera funkcji $-2\pi ixf(x)$ jest $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$

Dowód. Dowody pierwszych trzech własności są **Ćwiczeniem 7.6.** Aby udowodnić (iv) całkując przez części mamy

$$\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}\,dx = [f(x)e^{-2\pi ix\xi}]_{x=-N}^{x=N} - 2\pi i\xi\int_{-N}^{N} f(x)e^{2\pi ix\xi}\,dx.$$

Biorąc $N \to \infty$ mamy (iv).

Aby udowodnić (v) rozważmy

$$\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-2\pi ixf})(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\Big[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\Big]\,dx.$$

Ponieważ $f(x)$ i szybko maleje w nieskończoności i

$$\Big|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}\Big| \leq C(1+|x|)$$

niezależnie od h (dlaczego?) dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje N, że

$$\int_{|x|>N} \Big|f(x)e^{-2\pi ix\xi}\Big[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\Big]\Big|\,dx \leq \varepsilon.$$

Ponadto biorąc $|h|$ małe mamy $|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix| \leq \varepsilon$ dla $|x| \leq N$. Stąd teza. □

Wniosek 7.6. *Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to $\hat{f} \in \mathcal{S}$.*

Dowód. **Ćwiczenie 7.7.** Wskazówka: zastosuj (iv) i (v). □

7.4. **Jądro Gaussa na $\mathbb{R}$.** Rodzinę funkcji

$$h_t(x) = t^{-1/2} e^{-\frac{\pi x^2}{t}}$$

nazywamy jądrem Gaussa.

Ćwiczenie 7.8. Wykaż stosując twierdzenie Fubiniego i zamianę zmiennych na biegunowe, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1.$$

Wówczas $\int_{-\infty}^{\infty} h_t(x)\, dx = 1$.

Twierdzenie 7.7. *Niech* $h(x) = h_1(x)$. *Wówczas* $\hat{h}(\xi) = h(\xi)$.

D o w ó d. Zdefiniujmy $F(\xi) = \hat{h}(\xi)$. Z ćwiczenia 7.8 mamy $F(0) = 1$. Ponadto

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) h(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} h'(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx = -2\pi\xi F(\xi).$$

Niech $G(\xi) = F(\xi) e^{\pi\xi^2}$. Wówczas $G(0) = 1$ i $G'(\xi) = 0$. Stąd $G(\xi) = G(0) = 1$. Co daje tezę. □

Wniosek 7.8. $\widehat{h_t}(\xi) = e^{-\pi t \xi^2}$.

D o w ó d. **Ćwiczenie 7.9.** □

Jądro Gaussa tworzy tak zwaną jedność aproksymatywną, bo spełnia następujące warunki jedności aproksymatywnej **Ćwiczenie 7.10**

$$\int h_\delta = 1 \tag{7.9}$$

$$\int |h_\delta| \le M \tag{7.10}$$

$$\text{dla każdej liczby } \ \eta > 0 \ \text{ mamy } \int_{|x|>\eta} |K_\delta| \to 0 \ \text{ przy } \ \delta \to 0 \tag{7.11}$$

Lemat 7.12. *Jeśli K_δ jest jednością aproksymatywną (spełnia (7.9) – (7.11), to dla $f \in \mathcal{S}$ mamy*

$$\lim_{\delta\to 0} f * K_\delta(x) = f(x)$$

jednostajnie względem x.

D o w ó d. Mamy

(7.13)

$$\begin{aligned} |f * K_\delta(x) - f(x)| &= |\int K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]\, dt| \\ &\le \int_{|x|\le\eta} |f(x-t) - f(x)||K_\delta(t)|\, dt + \int_{|x|\ge\eta} |f(x-t) - f(x)||K_\delta(t)|\, dt \end{aligned}$$

Ustalając $\eta > 0$ małe mamy, że pierwsza całka jest mała. Następnie korzystając z (7.11) mamy, że druga całka dąży do zera przy $\delta \to 0$. $\square$

7.5. **Odwrócenie transformacji Fouriera, wzór Plancherela.**

Lemat 7.14. *Dla $f, g \in \mathcal{S}$ mamy*
$$\int f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int \hat{f}(x)g(x)\,dx.$$

D o w ó d. Lemat wynika z twierdzenia Fubiniego. $\square$

Twierdzenie 7.15. (wzór na odwrócenie) *Dla $f \in \mathcal{S}$ mamy*
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi.$$

D o w ó d. Niech $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$. Stosując twierdzenie 7.5 mamy

(7.16)
$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\int f(x-\xi)h_\delta(\xi)\,d\xi &= \lim_{\delta\to 0}\int f(x-\xi)\widehat{G_\delta}(\xi)\,d\xi \\ &= \lim_{\delta\to 0}\int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}e^{-\pi\delta\xi^2}\,d\xi = \int \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi. \end{aligned}$$
co dowodzi twierdzenia.

Wniosek 7.17. *Transformacja Fouriera przekształca $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$ wzajemnie jednoznacznie.*

Ćwiczenie 7.11. Udowodnij, że dla $f, g \in \mathcal{S}$ mamy
$$f * g \in \mathcal{S}$$
$$f * g = g * f$$

Oznaczmy
$$\|f\|_{L^2}^2 = \int |f(x)|^2\,dx.$$
Mamy

Twierdzenie 7.18. *Dla $f \in \mathcal{S}$ mamy*
$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

D o w ó d. Dla $f \in \mathcal{S}$ niech $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Wówczas $\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Niech $h = f * \tilde{f}$. Mamy
$$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 \quad \text{i} \quad \int |f(x)|^2\,dx = h(0) = \int \hat{h}(\xi)\,d\xi = \int |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$
$\square$

Ćwiczenie 7.12. Sprawdź, że dowody twierdzeń na odwrócenie transformaty i równości Plancherela zachodzą przy założeniu, że f i $\hat{f}$ mają umiarkowane malenie.

7.6. **Równanie ciepła.** Równaniem ciepła nazywamy równanie różniczkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

jest to równanie opisujące temperaturę nieskończonego pręta w chwili czasu t. Biorąc transformatę Fouriera po zmiennej x w powyższym równaniu dostajemy

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi, t).$$

Rozwiązując, to równanie różniczkowe mamy

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$$

dla pewnej funkcji $A(\xi)$. Wstawiając $t = 0$ mamy $A = \hat{u}(\xi, 0)$. Zdefiniujmy $\mathcal{H}_t(x) = (4\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}$ mamy

$$\hat{\mathcal{H}}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t\xi^2}.$$

Stad $\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\hat{\mathcal{H}}_t(\xi)$. Tak więc sugeruje to nam, że rozwiązaniem równania ciepła jest

$$u(x, t) = u_0 * \mathcal{H}_t(x), \quad u_0(x) = u(x, 0).$$

Twierdzenie 7.19. *Dla $f \in \mathcal{S}$ i $t > 0$ niech*

$$u(x, t) = (f * \mathcal{H}_t)(x).$$

Wówczas

(i) Funkcja u jest klasy C^2 i rozwiązuje równanie ciepła.

(ii) $u(x, t) \to f(x)$ jednostajnie przy $t \to 0$. Stąd kładąc $u(x, 0) = f(x)$ mamy, że u jest ciągła w domknięciu górnej półpłaszczyzny.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2\, dx = 0$ przy $t \to 0$.

Dowód. Mamy

$$u(x, t) = \int \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2 t\xi^2}e^{2\pi i\xi x}\, d\xi.$$

Różniczkując pod znakiem całki otrzymujemy (i)

(ii) wynika z faktu, że $\mathcal{H}_t$ tworzą jedność aproksymatywną.

Aby udowodnić (iii) stosujemy wzór Plancherela

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(x, t) - \hat{f}(x)|^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|e^{-4\pi^2 t\xi^2} - 1|\, d\xi.$$

Zauważmy, że ostatnia całka zbiega do zera przy $t \to 0$. □

Ćwiczenie 7.14. Udowodnij, że funkcja u z twierdzenia 7.19 należy jednostajnie do klasy Schwartza, tj. dla każdego $T > 0$ i każdego $k, l \geq 0$ mamy

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\ 0<t<T} |x|^k \Big| \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x, t) \Big| < \infty.$$

Twierdzenie 7.20. *Załóżmy, że $u(x,t)$ spełnia następujące warunki:*
(i) u jest ciągła w domknięciu górnej półpłaszczyzny,
(ii) u spełnia równanie ciepła dla $t > 0$
(iii) $u(x,0) = 0$
(iv) $u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jednostajnie względem t (por. ćwiczenie 7.14).
Wówczas $u = 0$

D o w ó d . Zdefiniujmy energię

$$E(t) = \int |u(x,t)|^2\, dx.$$

Wówczas E jest funkcją ciągłą nieujemną dla $t \geq 0$. Pokażemy, że jest funkcją malejącą. Dla $t > 0$ obliczmy

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \big(\partial_t u(x,t)\bar{u}(x,t) + u(x,t)\partial_t \bar{u}(x,t)\big)\, dx.$$

Mamy $\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$, $\partial_t \bar{u}(x,t) = \partial_x^2 \bar{u}(x,t)$. Stąd podstawiając a następnie całkując przez części mamy

$$E'(t) = -\int_{\mathbb{R}} \big(\partial_x u \partial_x \bar{u} + \partial_x u \partial_x \bar{u}\big)\, dx = -2\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2\, dx < 0.$$

Tak więc E jest funkcją malejąca dla $t > 0$ i ciągłą na $[0,\infty)$. Stąd $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$. $\square$

Ćwiczenie 7.15. Niech $f = \chi_{[-1,1]}$, $g(x) = 1 - |x|$ dla $|x| \leq 1$ i $g(x) = 0$ dla $|x| > 1$. Znajdź $\hat{f}$ i $\hat{g}$.

Ćwiczenie 7.16. Załóżmy, że f ma umiarkowane malenie. Udowodnij, że $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą.

Ćwiczenie 7.17. Załóżmy, że f ma umiarkowane malenie i $\hat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-1-\alpha}$ przy $|\xi| \to \infty$ dla pewnej stałej $0 < \alpha < 1$. Udowodnij, że istnieje $M > 0$, że

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha$$

Ćwiczenie 7.18. Niech $a < b$ i niech $f(x) = e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}$ dla $a < x < b$ i $f(x) = 0$ dla $x \notin (a,b)$. Dowieść, że $f \in C^\infty$.

Udowodnij istnienie funkcji F klasy C^∞ takiej, że $F(x) = 0$ dla $x \leq a$, $F(x) = 1$ dla $x \geq b$. i F jest ściśle rosnąca w (a,b).

Udowodnij teraz istnienie funkcji nieujemnej przedziałami monotonicznej g klasy C^∞ takiej, że $g = 0$ dla $x \notin (a,b)$, $g = 1$ na $[a+\delta, b-\delta]$.

Ćwiczenie 7.19. Niech f będzie funkcją ciągła o umiarkowanym maleniu. Udowodnij

a) $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą i $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

b) Jeśli ponadto $\hat{f}(\xi) = 0$ dla wszystkich ξ, to $f = 0$.

Ćwiczenie 7.20. Jeśli f ciągła o umiarkowanym maleniu spełnia $\int f(y)e^{-y^2}e^{2xy}\, dy = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $f = 0$.

Ćwiczenie 7.21. Niech f będzie funkcja o umiarkowanym maleniu. Wówczas

$$\int_{-R}^{R} \Big(1 - \frac{|\xi|}{R}\Big)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi} = (f * \mathcal{F}_R)(x),$$

gdzie

$$\mathcal{F}_R(t) = R\Big(\frac{\sin \pi t R}{\pi t R}\Big)^2 \tag{7.21}$$

Udowodnij, że $\mathcal{F}_R$ tworzy jedność aproksymatywną przy $R \to \infty$. Nazywa się ona jądrem Fejera.

Ćwiczenie 7.22. Udowodnij że rozwiązanie równania ciepła dane przez $u = f * \mathcal{H}_t$, gdzie $f \in \mathcal{S}$ jest ciągłe do brzegu i znika w nieskończoności, tj.

$$u(x,t) \to 0 \quad \text{gdy} \quad |x| + t \to \infty.$$

7.7. **Równanie Laplace'a w górnej półpłaszczyźnie.** Niech $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$. Interesuje nas znalezienie rozwiązania następującego równania w $\mathbb{R}^2_+$

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

z warunkiem brzegowym

$$u(x,0) = f(x).$$

Postępując podobnie jak dla równania ciepła rozważamy transformacje Fouriera $\hat{u}(\xi, y)$ po u zmiennej x i dostajemy

$$-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0$$

z warunkiem brzegowym

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi).$$

Jest to równanie liniowe zwyczajne drugiego rzędu, którego rozwiązanie ma postać

$$\hat{u}(\xi,y) = A(\xi)e^{-2\pi|\xi|y} + B(\xi)e^{2\pi|\xi|y}.$$

Jeśli pominiemy drugi składnik mający eksponencjalny wzrost w nieskończoności (tj. położymy $B(\xi) = 0$), i podstawimy $y = 0$, to otrzymamy

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}.$$

Stąd u jest zadane przez splot z jądrem, którego transformata Fouriera wynosi $e^{-2\pi|\xi|y}$.

Mamy następujące

Twierdzenie 7.22.

$$\int e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \mathcal{P}_y(x),$$

$$\int P_y(x) e^{-2\pi i x\xi}\, dx = e^{-2\pi|\xi|y}.$$

Dowód. Pierwszy wzór obliczamy bezpośrednio rozbijając całkę po prostej na sumę całek po symetrycznych półprostych. Mamy

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\xi y} e^{2\pi i\xi x}\, d\xi = \int_0^\infty e^{2\pi i(x+iy)\xi}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i(x+iy)},$$

i podobnie

$$\int_0^\infty e^{2\pi\xi y} e^{2\pi i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i(x - iy)}.$$

Dodając uzyskujemy pierwszy wzór. Drugi wzór wynika że wzoru na odwrócenie. $\square$

7.8. **Zasada nieoznaczoności Heisenberga.** Zasada ta orzeka, że funkcja i jej transformata Fouriera nie mogą być jednocześnie zlokalizowane. Matematycznie wrazić to można w następujący sposób.

Twierdzenie 7.23. *Niech* $\psi \in \mathcal{S}$, $\|\psi\|_{L^2} = 1$. *Wówczas*

$$\Big(\int x^2 |\psi(x)|^2\, dx\Big)\Big(\int \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi\Big) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Ponadto równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\psi(x) = Ae^{-Bx^2}, \tag{7.24}$$

$B > 0$, $A^2 = \sqrt{2B/\pi}$.

D o w ó d . Całkując przez części, mamy

$$\begin{aligned} 1 = \int |\psi(x)|^2\, dx &= -\int x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2\, dx \\ &= -\int \Big(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x)\Big)\, dx. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Stosując nierówność Schwarza dostajemy

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2\int |x||\psi(x)||\psi'(x)|\, dx \\ &\leq 2\Big(x^2|\psi(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}\Big(\int |\psi'(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{7.26}$$

Zauważmy, że

$$\int |\psi'(x)|^2\, dx = 4\pi^2 \int \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Dowód, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest jądrem Gaussa, jest następnym ćwiczeniem $\square$

Ćwiczenie 7.23. Udowodnij (7.24). Wskazówka: równość w nierówności Schwarza zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory są proporcjonalne czyli $x\psi = c\psi'$

Ćwiczenie 7.24. Udowodnij, że funkcja

$$u(x,t) = \frac{x}{t}\mathcal{H}_t(x)$$

spełnia równanie ciepła dla $t > 0$ i $\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0$ dla każdego x, ale u nie jest ciągła "do brzegu".

7.9. **Funkcje Hermite'a.**

Ćwiczenie 7.25. Funkcje Hermite'a $h_k(x)$ zdefiniowane są przez funkcje generującą

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

Udowodnij, że można je zdefiniować alternatywnie jako

$$h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k e^{-x^2}.$$

Wskazówka: Zapisz $e^{-(x^2/2-2tx+t^2)} = e^{x^2/2}e^{-(x-t)^2}$ i zastosuj wzór Taylora. Wywnioskuj, że każda funkcja h_k jest postaci $P_k(x)e^{-x^2/2}$, gdzie P_k jest wielomianem stopnia k.

Zauważ, że $h_k \in \mathcal{S}$.

Ćwiczenie 7.26. Udowodnij, że układ h_k jest zupełny, tj. jeśli $f \in \mathcal{S}$ i

$$\int h_k(x)f(x)\,dx = 0$$

dla wszystkich k, to $f = 0$.

Ćwiczenie 7.27. Niech $h_k^*(x) = h_k(\sqrt{2\pi}x)$. Wykaż, że

$$\hat{h_k^*}(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi).$$

Stąd h_k^* są funkcjami własnymi transformaty Fouriera.

Ćwiczenie 7.28. Niech $Lf(x) = -f''(x) + x^2 f(x)$ będzie operatorem Hermite'a. Udowodnij, że

$$Lh_k = (2k+1)h_k.$$

Wywnioskuj, że f_k są ortogonalne w L^2.

Ćwiczenie 7.29. Wykaż, że $\|h_k\|_{L^2}^2 = \sqrt{\pi}2^k k!$. Wskazówka: Rozważ kwadrat funkcji generującej.

Uzupełnienia (dla studentów znających całkę Lebesgue'a)

Lemat 7.27. *Zbiór funkcji ciągłych o nośnikach ograniczonych (zwartych) jest gęsty w $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$.*

Dowód. Przeprowadzimy dla $p = 1$ Załóżmy, że $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [-2,2] \subset [-\pi,\pi]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na mocy twierdzeń o gęstości przestrzeni funkcji ciągłych z poprzednich rozdziałów istnieje funkcja ciągła ϕ, która jest 2π-okresowa, że $\int_{-\pi}^{\pi} |f-\phi| < \varepsilon$. Niech η będzie funkcją ciągłą, że $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ na $[-2,2]$, $\eta(x) = 0$ dla $|x| \ge \pi$. Wówczas $\int_{-\pi}^{\pi} |f-\eta\phi| < \varepsilon$. Zatem istnieje funkcja ciągła $\psi = \eta\phi$ o nośniku w $[-\pi,\pi]$, że $\int |f-\psi| < \varepsilon$.

Jeśli teraz $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\operatorname{supp} f \subset [-a,a]$, to $g(x) = f(ax)$ ma nośnik w $[-1,1] \subset [-2,2]$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ψ ciągła o nośniku zwartym, że $\int |g(x)-\psi(x)| < \varepsilon/a$. Zatem $|f(x)-\psi(x/a)|dx = a\int |g(x)-\psi(x)|\,dx < \varepsilon$.

Jeśli teraz $f \in L^1(\mathbb{R})$ jest dowolna funkcją, to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $a > 0$, że $\int_{|x|>a} |f| < \varepsilon$. Funkcja $f_1 = f(x)\Big|_{[-a,a]}$ ma nośnik w $[-a,a]$. Zatem istnieje funkcja ψ ciągła o nośniku zwartym, że $\int |f_1-\psi| < \varepsilon$, co daje $\int |f-\psi| < 2\varepsilon$. $\square$

Lemat 7.28. *Jeśli f jest funkcją ciągłą o nośniku zwartym, to $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, gdzie $C_0(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych mających granicę zero w $+\infty$ i $-\infty$.*

Dowód. Wystarczy pokazać granice, bo ciągłość już była. Niech $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$. Przyjmijmy, że $a > 1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z ciągłości istnieje $\delta > 0$, że $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/(4a)$ dla $|x - x'| < \delta$. Niech $|\xi| > \delta^{-1}$. Podzielmy prostą na odcinki $[x_j, x_{j+1}] = I_j$ o rozłącznych wnętrzach i długości $|\xi|^{-1} < \delta$. Mamy

$$\Big| \int_{I_j} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \Big| = \Big| \int_{I_j} (f(x) - f(x_j)) e^{-2\pi i x\xi}\, dx \Big| \leq \varepsilon |I_j|/(4a).$$

Niech A oznacza te j dla których $I_j \cap [-a, a] \neq \emptyset$. Mamy $\sum_{j\in A} |I_j| < 4a$. Zatem

$$\Big|\hat{f}(\xi)\Big| = \Big| \sum_{j\in A} \int_{I_j} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \Big| < \varepsilon/(4a) \sum_{j\in A} |I_j| < \varepsilon.$$

$\square$

8. Transformacja Fouriera w $\mathbb{R}^d$

8.1. **Oznaczenia i definicje.** Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^d$ oznaczać będziemy przez $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$. Długość wektora $x = (x_1, ..., x_d)$ oznaczamy przez

$$|x| = (x_1^2 + ... + x_d^2)^{1/2}.$$

Dla dwóch wektorów $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$ oznaczamy przez $x \cdot y$ lub $\langle x, y\rangle$ ich iloczyn skalarny, tj.

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$$

Wielowskaźnikiem lub multyindekseem nazywamy d wyrazowy ciąg $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ liczb całkowitych nieujemnych. Wielowskaźniki oznaczać będziemy greckimi literami. Dodajemy je jak wektory. Długością wielowskaźnika nazywamy liczbę $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$. Wielowskaźniki dodajemy do siebie jak wektory. Dla wielowskaźnika $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ oznaczmy

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_d^{\alpha_d},$$

$$D^\alpha = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^{\alpha_2} ... \Big(\frac{\partial}{\partial x_d}\Big)^{\alpha_d}.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ mamy podobnie jak w $\mathbb{R}$ translacje $x \mapsto x + y$ i dylatacje $x \mapsto tx$. Ponadto ważną grupą przekształceń jest grupa obrotów $x \mapsto Ax$, gdzie A jest macierzą ortogonalną (przekształceniem ortogonalnym), tj. przekształceniem liniowym zachowującym iloczyn skalarny.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(tx)\,dx = t^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Przez $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oznaczać będziemy klasę Schwartza, tj. zbiór funkcji f takich, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x|^k |\, D^\alpha f(x)| < C_{\alpha,k} < \infty$$

dla wszystkich $k \geq 0$ i α.

8.2. **Transformata Fouriera.** Dla funkcji całkowalnej f definiujemy jej transformatę Fouriera

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx.$$

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.1. *Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy*
(i) $f(x+h)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot h}$
(ii) $(f(x)e^{-2\pi i x\cdot h})\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi+h)$,
(iii) $(f(tx))\hat{}(\xi) = t^{-d}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$
(iv) $(D^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$,
(v) $(-2\pi i x)^\alpha f(x))\hat{}(\xi) = D^\alpha \hat{f}(\xi)$
(vi) $(f(Ax))\hat{}(\xi) = \hat{f}(A\xi)$ *dla obrotu A.*

Ćwiczenie 8.1. Udowodnij powyższe twierdzenie.

Wniosek 8.2. *Transformata Fouriera odwzorowuje klasę Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Funkcje f nazywamy *radialną*, gdy $f(x) = f(y)$ jeśli tylko $|x| = |y|$ lub inaczej $f(x) = f(Ax)$ dla każdego obrotu A.

Wniosek 8.3. *Transformata Fouriera funkcji radialnej $f \in \mathcal{S}$ jest radialna.*

Ćwiczenie 8.2. Transformata Fouriera funkcji rozdzielonych zmiennych $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_d(x_d)$, $f_j \in \mathcal{S}$ jest iloczynem $\hat{f}_j(\xi_j)$.

Ćwiczenie 8.3. Dla $f, f \in \mathcal{S}$ zdefiniujmy splot

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

Udowodnij, że splot jest operacją przemienną oraz

$$\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Twierdzenie 8.4. *Załóżmy, że $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wówczas*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi.$$

Dowód. *Krok 1;* zauważmy, że transformata Fouriera funkcji $e^{-\pi|x|^2}$ jest równa $e^{-\pi|\xi|^2}$.

Krok 2; Rodzina funkcji $K_\delta(x) = \delta^{-d/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$ tworzy jedność aproksymatywną.

Krok 3;

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) g(y) \, dy.$$

Stąd wzór na odwrócenie wynika z takiego samego rozumowania jak w przypadku jednowymiarowym

□

Wniosek 8.5. Wzór Plancherela

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Ćwiczenie 8.4. Udowodnić powyższy wniosek.

Ćwiczenie 8.5. Transformata Fouriera przekształca klasę Schwartza **na** siebie.

Zakończmy nasze rozważania następującym twierdzeniem, którego dowód wynika z faktu, że funkcje klasy C^∞ o nośniku zwartym leżą gęsto w $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Twierdzenie 8.6. Lemat Riemanna-Lebesgue'a *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f}(\xi) \to 0$ przy $|\xi| \to \infty$.*

8.3. **Równanie fali.** Oznaczenia: $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ Interesuje nas zagadnienie znalezienia rozwiązania zagadnienia Cauchy'oego dla równania fali tj. rozwiązania równania

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \Delta u(x,t),$$

przy warunkach początkowych

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x).$$

Rozważmy transformatę Fouriera u po zmiennej x. Wówczas mamy

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\xi,t).$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja postaci

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t).$$

Warunki początkowe przechodzą na

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi), \quad \partial_t \hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi).$$

Rozwiązując mamy

$$A(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad 2\pi|\xi|B(\xi) = \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}.$$

Stąd

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}.$$

Twierdzenie 8.7. *Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania fali z funkcjami $f, g \in \mathcal{S}$ jest*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Big] e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

D o w ó d.

Sprawdźmy, że całka zadaje rozwiązanie równania fali. Istotnie różniczkując pod znakiem całki mamy

$$\Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Big](-4\pi^2|\xi|^2) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi. \tag{8.8}$$

Z drugiej strony różniczkując dwukrotnie względem t mamy

(8.9)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big[-4\pi^2|\xi|^2\hat{f}(\xi)\cos(2\pi\xi|t) - 4\pi^2|\xi|^2\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\Big] e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

Kładąc $t = 0$ mamy

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = f(x).$$

Różniczkując jeden raz względem t i potem podstawiając $t = 0$ mamy

$$\frac{\partial u}{\partial t}u(x,0) = g(x).$$

□

Dla rozwiązania u równania fali oznaczmy prze $E(t)$ jej energię, to jest wielkość

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|^2 + ... + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_d}\Big|^2\, dx.$$

Mamy

Twierdzenie 8.10. *Rozwiązanie rozwadnia fali dane przez powyższy wzór ma stałą energię, to jest $E(t) = E(0)$.*

D o w ó d.

Dla liczb zespolonych a i b i liczby rzeczywistej α mamy

$$|a\cos\alpha + b\sin\alpha|^2 + |-a\sin\alpha + b\cos\alpha|^2 = |a|^2 + |b|^2. \tag{8.11}$$

Stąd że wzoru Plancherela mamy

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |-2\pi|\xi|\hat{f}(\xi)\sin(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)|^2\, d\xi.$$

Podobnie

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi|\xi|\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}\sin(2\pi|\xi|t)|^2\, d\xi$$

Stosując (8.11) mamy tezę.

8.4. **Równanie fali w $\mathbb{R}^3$.** Niech S^2 oznacza sferę jednostkową w $\mathbb{R}^3$. Przez

$$\int_{S^2} f(\gamma) d\sigma(\gamma)$$

oznaczać będziemy całkę powierzchniową. Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ oznaczmy przez

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - t\gamma) d\sigma(\gamma).$$

Lemat 8.12. *Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, to dla każdego t mamy $M_t(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Ponadto, $M_t(f)$ jest klasy C^∞ względem t i każda pochodna względem t należy do $\mathcal{S}$.*

D o w ó d. **Ćwiczenie 8.6**. □

Lemat 8.13.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi\cdot\gamma}\, d\sigma(\gamma) = \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$$

D o w ó d. Zauważmy, że całka po lewej stronie jest funkcją radialną. Dlatego wystarczy udowodnić dla $\xi = (0, 0, \rho)$. Dla $\rho = 0$ wzór jest oczywisty. Jeśli $\rho > 0$, to stosujemy współrzędne sferyczne i dostajemy, że całka jest równa

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-2\pi i\rho\cos\theta} \sin\theta\, d\theta d\phi.$$

Zamiana zmiennych $u = -\cos\theta$ daje

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-2\pi i\rho\cos\theta} \sin\theta\, d\theta d\phi &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{-2\pi i\rho\cos\theta} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{2\pi i\rho u}\, du \\ &= \frac{\sin(2\pi\rho)}{2\pi|\xi|t} \end{aligned} \tag{8.14}$$

□

Mamy

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}.$$

Twierdzenie 8.15. *Rozwiązanie równania fali w* $\mathbb{R}^3$ *z warunkami początkowymi* $u(x,0) = f(x)$, $\partial_t u(x,0) = g(x)$ *dane jest przez*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(tM_t(f)(x)) + tM_t(g)(x).$$

D o w ó d. Załóżmy, że $f(x) = 0$. Wówczas rozwiązanie zagadnienia dane jest przez

$$\begin{aligned} u(x,t) &= t\int_{\mathbb{R}^3} \Big[\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}\Big]e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= tM_t(g)(x) \end{aligned} \tag{8.16}$$

Jeśli założymy teraz, że $g = 0$, to rozwiązanie zagadnienia dane jest

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Big[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)\Big]e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\ &= \partial_t\Big(t\int_{\mathbb{R}^3} \Big[\hat{f}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}\Big]e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\Big) \\ &= \partial_t(tM_t(f)(x)) \end{aligned} \tag{8.17}$$

□

8.5. **Zastosowania. Transformata Radona, czyli jak sobaczyć wnętrze będąc na zewnątrz.**

Rozważmy dwuwymiarowy obiekt $\mathcal{O}$ leżący w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, o którym możemy myśleć że jest przekrojem płaszczyznowym ludzkiego organu. Załóżmy początkowo, że obiekt jest jednorodny (ma stałą gęstość) i że jest prześwietlany bardzo wąską wiązką promieni rentgenowskich. Jeśli I_0 jest intensywnością wiązki na wejściu, a I intensywnością wiązki na wyjściu z obiektu, to zachodzi następująca relacja

$$I = I_0 e^{-d\rho},$$

gdzie d jest długością drogi jaką pokonuje promień rentgenowski przechodząc przez obiekt, a ρ jest tak zwanym współczynnikiem absorpcji, o którym możemy myśleć w naszym modelu, że jest proporcjonalny do gęstości obiektu. Jeśli teraz gęstość obiektu ρ zmienia się z punktu do punktu (czyli jest funkcją dwóch zmiennych: $\rho = f(x,y)$), to nasza zależność pomiędzy intensywnością na wejściu i wyjściu przybiera postać

$$I = I_0 e^{-\int_L \rho},$$

gdzie L jest linią wzdłuż której wysyłana jest wiązka. Wyobraźmy sobie, że mamy urządzenie potrafiące wysyłać promienie rentgenowskie przez obiekt wzdłuż wszystkich możliwych kierunków (prostych L) i mierzyć ich intensywność na wejściu i wyjściu. Wówczas logarytmując powyższą zależność jesteśmy w stanie określić wszystkie możliwe całki $\int_L \rho$. Funkcję, która każdej możliwej prostej L przyporządkowuje całkę $\int_L \rho$ nazywamy transformatą Radona (w literaturze anglojęzycznej zwaną także **"X-ray transform"**) i oznaczaną $X(\rho)(L)$

lub $\mathcal{R}(\rho)(L)$, to znaczy

$$X(\rho)(L) = \int_L \rho.$$

Interesuje nas następujące zagadnienie. Czy znając wszystkie pomiary $X(\rho)(L)$ jest możliwe odtworzyć funkcję ρ?

Przejdźmy teraz do precyzyjnego z punktu widzenia analizy fourierowskiej zagadnienia odwrócenia transformacji Radona. Zbiór prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ możemy sparametryzować parami (t, α), gdzie $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \pi)$. Dla (t, α) przez $L(t, \alpha)$ oznaczamy prostą prostopadłą do wektora $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, przechodzącą przez $(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$. Prosta taka ma równie $x\cos\alpha + y\sin\alpha = t$ i można ją opisać parametrycznie wzorem $\mathbb{R} \ni u \mapsto (t\cos\alpha + u\sin\alpha, t\sin\alpha - u\cos\alpha)$.

Dla funkcji f, należącej do klasy Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, zdefiniujmy jej transformatę Radona (X-ray transform) $Rf(t, \alpha)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \pi]$, wzorem

$$(Rf)(t, \alpha) = \int_{L(t,\alpha)} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\alpha + u\sin\alpha, t\sin\alpha - u\cos\alpha)\, du.$$

Ćwiczenie 8.7. Przyjmujmy, że $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Wówczas $Rf(t, \alpha)$ przy ustalonym α jest funkcją z klasy Schwartza zmiennej t. Ponadto

$$\|Rf(t, \alpha) - Rf(t, \alpha')\|_N \leq C|\alpha - \alpha'|.$$

Przy ustalonym α obliczmy jednowymiarową transformatę Fouriera $\mathcal{F}$ funkcji $Rf(t, \alpha)$ w punkcie ξ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}Rf(\xi, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\xi t} Rf(t, \alpha)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi i t\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\cos\alpha + u\sin\alpha, t\sin\alpha - u\cos\alpha) du\, dt \\
&= \iint f(x, y) e^{-2\pi i(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\xi} dx\, dy \\
&= \hat{f}(\xi\cos\alpha, \xi\sin\alpha).
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Wykazaliśmy, że jednowymiarowa (częściowa) transformata Fouriera transformaty Radona funkcji f okazuje się być dwuwymiarową transformatą Fouriera $\hat{f}$ funkcji f. Stosując teraz wzór na odwrócenie transformaty Fouriera, a następnie zamianę zmiennych na biegunowe, dostajemy

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x\eta + y\delta)} \hat{f}(\eta, \delta)\, d\eta\, d\delta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} e^{2\pi i(\xi x\cos\alpha + \xi y\sin\alpha)} |\xi| \hat{f}(\xi\cos\alpha, \xi\sin\alpha)\, d\alpha d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\xi x\cos\alpha + \xi y\sin\alpha)} |\xi| e^{-2\pi i\xi t} Rf(t, \alpha)\, dt\, d\alpha d\xi.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Wyprowadziliśmy wzór na odwrócenie transformaty Radona.

Tak więc znając intensywności wiązek promieni na wejściu i wyjściu możemy określić wygląd (gęstość) prześwietlanego obiektu $\mathcal{O}$.

Powyższe zagadnienie ma swoje odpowiedniki w wyższych wymiarach. Czytelnik zainteresowany tymi zagadnieniami może znaleźć szczegóły w [1].

Zakończmy nasze rozważania uwagą, że w praktyce dysponujemy jedynie dużą, ale skończoną ilością pomiarów. Dlatego praktyczne odtworzenie funkcji ρ (z możliwie dokładnym przybliżeniem) opiera się numerycznych aproksymacjach i komputerowych algorytmach i teorii tak zwanej szybkiej transformacji Fouriera (fast Fourier transform).

9. LITERATURA

[1] E. Stein, R. Shakarachi, *Fourier Analysis, An Introduction*, Princeton Univ. Press, Princeton 2003.

[2] E. Stein, *Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscilatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton 1993.

[3] W. Rudin, *Podstawy Analizy Matematycznej*, PWN, Warszawa 1977.

[4] G.M. Fichtenholtz, *Rachunek Różniczkowy i Całkowy I, II, III*, PWN, Warszawa 1978.

[5] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prenitice Hall 2004.