

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej, stracisz 0.2 punktu.

Zmienne m, n przebiegają zbiór liczb naturalnych $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$1.1. A = \left\{ \frac{m}{n} : 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = \sqrt{3} \quad \sup A = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$1.2. B = \left\{ \frac{m}{n} : 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = 1/\sqrt{5} \quad \sup B = 1/2$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$1.3. C = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = \log_2 3 \quad \sup C = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

$$1.4. D = \left\{ \frac{m}{n} : 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \log_5 2 \quad \sup D = 1/2$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$1.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : 4^n \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 27^n \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = 2 \quad \sup E = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **2.**

Przy każdym z poniższych 15 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **Prawdą** (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **Falszem** (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **Nie** wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 10)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ oraz wiadomo, że implikacja $T(73) \Rightarrow T(37)$ jest fałszywa. Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(11)$ **F**

b) $T(55)$ **N**

c) $T(99)$ **P**

d) $T(11) \Rightarrow T(22)$ **P**

e) $T(22) \Rightarrow T(11)$ **P**

f) $T(44) \Rightarrow T(66)$ **P**

g) $T(66) \Rightarrow T(44)$ **N**

h) $T(88) \Rightarrow T(99)$ **P**

i) $T(99) \Rightarrow T(88)$ **P**

j) $T(22) \Rightarrow T(66)$ **P**

k) $T(66) \Rightarrow T(22)$ **N**

l) $T(44) \Rightarrow T(88)$ **P**

m) $T(88) \Rightarrow T(44)$ **N**

n) $T(22) \Rightarrow T(88)$ **P**

o) $T(88) \Rightarrow T(22)$ **F**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 3.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 7)$ punktów.

Czy podany szereg jest zbieżny (**TAK/NIE**)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 5)^n$ **NIE**

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 6)^n$ **TAK**

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 7)^n$ **TAK**

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 8)^n$ **NIE**

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **NIE**

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **NIE**

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ **TAK**

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ **TAK**

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ **NIE**

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **NIE**

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **TAK**

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$ **TAK**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 4.

W zadaniu 4.1 za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-1)$ punktów.

4.1 (3 punkty) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot A^{\{x\}} - b \cdot B^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a wyrażenia $\{x\}$ występują w wykładnikach potęg.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę rzeczywistą dodatnią tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba rzeczywista dodatnia o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=4$, $A=6$, $b=5$, $B=5$

b) $a=2$, $A=7$, $b=3$, $B=5$

c) $a=2$, $A=6$, $b=5$, $B=3$

d) $a=2$, $A=4$, $b=3$, $B=3$

W każdym z dwóch poniższych zadań udziel czterech odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

4.2 Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1| \leq |z-3|$

a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**

b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **NIE**

c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **TAK**

d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

4.3 Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-i| \leq |z-5i|$

a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7$ **TAK**

b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5$ **TAK**

c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11$ **NIE**

d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13$ **NIE**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 5.

Dla funkcji $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

a) (2 punkty) $f(x) = x^2$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y) \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100.$$

Możemy więc wskazać $x = 50, y = 51$.

b) (3 punkty) $f(x) = \frac{1}{x}$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100,$$

czyli

$$xy < \frac{1}{100}.$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10, y = 1/11$.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 6.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy

$$\frac{\binom{2}{1}}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

oraz

$$\frac{3^{n-1}}{2} = \frac{1}{2},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$1 > \frac{1}{2},$$

jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} \geq \frac{3^n}{2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} > \\ &> \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq \frac{3^{n-1}}{2} \cdot 3 = \frac{3^n}{2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(2n+1) \geq 3(n+2),$$

co kolejno przekształca się do

$$4n+2 \geq 3n+6,$$

czyli $n \geq 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$, $n = 3$ oraz $n = 4$. Sprawdzenie dla $n = 4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ oraz $n = 3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{4}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2 > \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2}.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{20}{4} = 5 > \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}.$$

Dla $n = 4$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{8}{4}}{5} = \frac{70}{5} = 14 > \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$, $n = 2$ oraz dla $n = 3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} > 3,$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 5$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 4$, to 2 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 5$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ♠), że została udowodniona implikacja $T(4) \Rightarrow T(5)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.

Chociaż nie jest to od razu widoczne, ani też nie jest istotne dla tego zadania, liczby $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ są całkowite. Chcesz wiedzieć więcej? Poszukaj hasła **Liczby Catalana**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 7.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 3^n \cdot x^{3n}}{n^2 + 10}.$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{(n+4) \cdot 3^{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(n+1)^2 + 10} \cdot \frac{n^2 + 10}{(n+3) \cdot 3^n \cdot x^{3n}} \right| = \frac{(n+4) \cdot (n^2 + 10) \cdot 3 \cdot |x|^3}{((n+1)^2 + 10) \cdot (n+3)} \rightarrow 3 \cdot |x|^3.$$

Jeżeli $3 \cdot |x|^3 < 1$, czyli

$$|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

to szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś $3 \cdot |x|^3 > 1$, czyli

$$|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

to szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/\sqrt[3]{3}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.Dla $x = 1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 + 10}.$$

Udowadniamy jego rozbieżność korzystając z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 + 10} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+0}{n^2 + 10n^2} = \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Dla $x = -1/\sqrt[3]{3}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 + 10} \cdot (-1)^n.$$

Udowadniamy jego zbieżność korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2 + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{10}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n+3}{n^2+10} \geq \frac{n+4}{(n+1)^2+10}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}(n+3) \cdot (n^2+2n+11) &\geq (n+4) \cdot (n^2+10) \\ n^3+2n^2+11n+3n^2+6n+33 &\geq n^3+10n+4n^2+40 \\ n^3+5n^2+17n+33 &\geq n^3+4n^2+10n+40 \\ n^2+7n-7 &\geq 0 \\ n^2+7(n-1) &\geq 0,\end{aligned}$$

co jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right).$$

Punktacja:

Wyznaczenie promienia zbieżności: **2 punkty**.

Dowód rozbieżności dla $x = 1/\sqrt[3]{3}$: **1 punkt**.

Dowód zbieżności dla $x = -1/\sqrt[3]{3}$: **2 punkty**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 8.

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \leq n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k} \cdot n^{k/2-4}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7} = \sqrt{k \cdot n^{k/2-4} + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.