

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 23.01.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej, stracisz 0.2 punktu.

Zmienne m, n przebiegają zbiór liczb naturalnych $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

1.1. $A = \left\{ \frac{m}{n} : 3n^2 \leq m^2 \leq 4n^2 \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

1.2. $B = \left\{ \frac{m}{n} : 4m^2 \leq n^2 \leq 5m^2 \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

1.3. $C = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 2^m \leq 4^n \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

1.4. $D = \left\{ \frac{m}{n} : 4^m \leq 2^n \leq 5^m \right\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

1.5. $E = \left\{ \frac{m}{n} : 4^n \leq \left(\frac{m}{n} \right)^m \leq 27^n \right\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 2.

Przy każdym z poniższych 15 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 10)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ oraz wiadomo, że implikacja $T(73) \Rightarrow T(37)$ jest fałszywa. Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(11)$

b) $T(55)$

c) $T(99)$

d) $T(11) \Rightarrow T(22)$

e) $T(22) \Rightarrow T(11)$

f) $T(44) \Rightarrow T(66)$

g) $T(66) \Rightarrow T(44)$

h) $T(88) \Rightarrow T(99)$

i) $T(99) \Rightarrow T(88)$

j) $T(22) \Rightarrow T(66)$

k) $T(66) \Rightarrow T(22)$

l) $T(44) \Rightarrow T(88)$

m) $T(88) \Rightarrow T(44)$

n) $T(22) \Rightarrow T(88)$

o) $T(88) \Rightarrow T(22)$

Zadanie **3.**

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 7)$ punktów.**

Czy podany szereg jest zbieżny (**TAK/NIE**)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 5)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 6)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 7)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{44} - 8)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

Zadanie 4.

W zadaniu 4.1 za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-1)$ punktów.

4.1 (3 punkty) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot A^{\{x\}} - b \cdot B^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , a wyrażenia $\{x\}$ występują w wykładnikach potęg.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę rzeczywistą dodatnią tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba rzeczywista dodatnia o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = \dots\dots\dots$, $A = 6$, $b = 5$, $B = 5$

b) $a = 2$, $A = \dots\dots\dots$, $b = 3$, $B = 5$

c) $a = 2$, $A = 6$, $b = \dots\dots\dots$, $B = 3$

d) $a = 2$, $A = 4$, $b = 3$, $B = \dots\dots\dots$

W każdym z dwóch poniższych zadań udziel czterech odpowiedzi **TAK/NIE**.
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

4.2 Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1| \leq |z-3|$

a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7 \dots\dots\dots$

b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5 \dots\dots\dots$

c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11 \dots\dots\dots$

d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13 \dots\dots\dots$

4.3 Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-i| \leq |z-5i|$

a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 7 \dots\dots\dots$

b) $z = \log_2 7 + i \cdot \log_2 5 \dots\dots\dots$

c) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_2 11 \dots\dots\dots$

d) $z = \log_2 5 + i \cdot \log_2 13 \dots\dots\dots$

Zadanie 5.

Dla funkcji $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|.$$

a) (2 punkty) $f(x) = x^2$

b) (3 punkty) $f(x) = \frac{1}{x}$

Zadanie 6.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Zadanie 7.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3) \cdot 3^n \cdot x^{3n}}{n^2 + 10}.$$

Zadanie 8.

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.