

# EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

## Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej, stracisz 0.2 punktu.

Przypominam, że  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

**1.1.**  $A = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf A = 1/2$$

$$\sup A = 1$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

**1.2.**  $B = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf B = 1$$

$$\sup B = +\infty$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **NIE**

**1.3.**  $C = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$  Ocena .....

$$\inf C = 1$$

$$\sup C = 1$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

**1.4.**  $D = \{\log_2(x+3) : x \in (-1, 5)\}$  Ocena .....

$$\inf D = 1$$

$$\sup D = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **NIE**

Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

**1.5.**  $E = \{\log_3(x^2+2) : x \in (-1, 5)\}$  Ocena .....

$$\inf E = \log_3 2$$

$$\sup E = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

## EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

### Zadanie 2.

W każdym z 4 poniższych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

**Z** - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

**R** - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

**N** - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

**X** - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Za każde zadanie, w którym podasz siedem poprawnych odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz sześć poprawnych odpowiedzi, otrzymasz 0.5 punktu.

Wyjątki: za 27 lub 28 poprawnych odpowiedzi otrzymasz odpowiednio 4 lub 5 punktów.

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów  $(a_n)$  spełnia podany warunek

2.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ , gdzie

a)  $g = -3$  **R**

b)  $g = -1$  **R**

c)  $g = -1/3$  **R**

d)  $g = 0$  **N**

e)  $g = 1/3$  **R**

f)  $g = 1$  **R**

g)  $g = 3$  **R**

2.2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ , gdzie

a)  $g = -3$  **R**

b)  $g = -1$  **N**

c)  $g = -1/3$  **Z**

d)  $g = 0$  **Z**

e)  $g = 1/3$  **Z**

f)  $g = 1$  **N**

g)  $g = 3$  **R**

2.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$ , gdzie

a)  $g = -3$  **Z**

b)  $g = -1$  **N**

c)  $g = -1/3$  **R**

d)  $g = 0$  **R**

e)  $g = 1/3$  **R**

f)  $g = 1$  **N**

g)  $g = 3$  **Z**

2.4  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$ , gdzie

a)  $g = -3$  **X**

b)  $g = -1$  **X**

c)  $g = -1/3$  **X**

d)  $g = 0$  **Z**

e)  $g = 1/3$  **Z**

f)  $g = 1$  **N**

g)  $g = 3$  **R**

**EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012**

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

**Zadanie 3.**

W każdym z osiemnastu poniższych pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.  
Za udzielenie  $n$  poprawnych odpowiedzi otrzymasz  **$\max(0, n - 13)$  punktów**.

W poniższych formułach zmienna  $n$  przebiega zbiór  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Ciąg  $(a_n)$  spełnia warunek

$$\forall_n |a_n - 5| < 1 + \frac{1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

**3.1** ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny **NIE**

**3.2** ciąg  $(a_n)$  jest rozbieżny **NIE**

**3.3**  $\forall_n a_n > 3$  **TAK**

**3.4**  $\exists_n a_n > 3$  **TAK**

**3.5**  $\forall_n a_n \leq 6$  **NIE**

**3.6**  $\exists_n a_n \leq 6$  **NIE**

**3.7**  $\forall_n a_n \neq \sqrt{37}$  **NIE**

**3.8**  $\exists_n a_n \neq \sqrt{37}$  **TAK**

**3.9**  $\forall_n a_n \neq \sqrt{17}$  **NIE**

**3.10**  $\exists_n a_n \neq \sqrt{17}$  **NIE**

**3.11**  $|a_1 - a_2| < 3$  **NIE**

**3.12**  $|a_2 - a_3| < 3$  **TAK**

**3.13**  $|a_3 - a_6| < \frac{5}{2}$  **TAK**

**3.14**  $|a_4 - a_5| < \frac{5}{2}$  **TAK**

**3.15**  $|a_1 - a_3| < 2$  **NIE**

**3.16**  $|a_{100} - a_{101}| < 2$  **NIE**

**3.17**  $|a_1 - a_3| > \frac{1}{10}$  **NIE**

**3.18**  $|a_{100} - a_{101}| > \frac{1}{10}$  **NIE**

**EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012**

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

*Zadanie* **4.**

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w  $n$  podpunktach otrzymasz **max**(0,  $n - 1$ ) punktów.

Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja  $f$  zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a)  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=3$ ,  $d=3$ ,  $e=3$

b)  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=\mathbf{NIE}$ ,  $d=4$ ,  $e=\mathbf{NIE}$

c)  $a=1$ ,  $b=3$ ,  $c=5$ ,  $d=4$ ,  $e=5$

d)  $a=2$ ,  $b=7$ ,  $c=8$ ,  $d=9$ ,  $e=8$

e)  $a=6$ ,  $b=7$ ,  $c=10$ ,  $d=13$ ,  $e=10$

f)  $a=6$ ,  $b=3$ ,  $c=8$ ,  $d=9$ ,  $e=8$

**EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012**

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

**Zadanie 5.**

Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

*Rozwiązanie:*

Aby udowodnić zbieżność szeregu, stosujemy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{0 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} \geq \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{n}{(2n+1)} &\geq \frac{(n+2)}{(2n+7)} \\ n \cdot (2n+7) &\geq (n+2) \cdot (2n+1) \\ 2n^2 + 7n &\geq 2n^2 + 5n + 2 \\ 2n &\geq 2 \\ n &\geq 1, \end{aligned}$$

co jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

W celu udowodnienia, że szereg wartości bezwzględnych jest rozbieżny, stosujemy kryterium porównawcze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+0)}{(2n+n) \cdot (2n+3n) \cdot (2n+5n)} = \frac{1}{105} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

## EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

### Zadanie 6.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

*Rozwiązanie:*

Rozważmy dowolny zbieżny szereg geometryczny o wyrazach wymiernych dodatnich, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Wówczas sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^4 = \frac{1}{15}$$

są liczbami wymiernymi.

Wystarczy teraz przemnożyć wyrazy wyjściowego szeregu geometrycznego przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników powyższych sum, aby uzyskać przykład spełniający warunki zadania.

W naszym wypadku otrzymujemy

$$a_n = \frac{105}{2^n}$$

i w konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 105,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{105^2}{3} = 105 \cdot 35,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{105^3}{7} = 105^2 \cdot 15,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{105^4}{15} = 105^3 \cdot 7.$$

**EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012**

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

**Zadanie 7.**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^n}{(2n)!}.$$

*Rozwiązanie:*

Korzystamy z kryterium d'Alemberta (przy założeniu  $x \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n+1)^{2n+2} \cdot x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n} \cdot x^n} \right| &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1)^2 \cdot |x|}{(2n+2) \cdot (2n+1)} = \\ &= \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^2 \cdot \frac{(n+1) \cdot |x|}{2 \cdot (2n+1)} \rightarrow \frac{e^2}{4} \cdot |x|. \end{aligned}$$

Jeżeli  $\frac{e^2}{4} \cdot |x| < 1$ , czyli

$$|x| < \frac{4}{e^2},$$

to szereg potęgowy jest zbieżny.

Jeżeli zaś  $\frac{e^2}{4} \cdot |x| > 1$ , czyli

$$|x| > \frac{4}{e^2},$$

to szereg potęgowy jest rozbieżny.

**Odpowiedź:** Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy  $\frac{4}{e^2}$ .

**EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012**

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

**Zadanie 8.**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej  $x$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$

*Rozwiązanie:*

W przypadku, gdy  $x \geq 1$ , wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{8x+0}{5x+x+8x} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq \frac{8x+7x}{5x+0+0} = \frac{15}{5} = 3.$$

Natomiast w przypadku, gdy  $0 < x < 1$ , oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{2} = \frac{7}{14} = \frac{0+7}{5+1+8} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq \frac{8+7}{0+0+8} = \frac{15}{8}.$$

Zauważamy, że

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{7}$$

oraz

$$\frac{15}{8} < 3.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej  $x$  zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2} \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 3,$$

można więc przyjąć  $C = 1/2$ .