

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 6.02.2012

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej, stracisz 0.2 punktu.

Przypominam, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

1.1. $A = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

1.2. $B = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

1.3. $C = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

1.4. $D = \{\log_2(x+3) : x \in (-1, 5)\}$ Ocena

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

1.5. $E = \{\log_3(x^2+2) : x \in (-1, 5)\}$ Ocena

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 2.

W każdym z 4 poniższych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Za każde zadanie, w którym podasz siedem poprawnych odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz sześć poprawnych odpowiedzi, otrzymasz 0.5 punktu.

Wyjątki: za 27 lub 28 poprawnych odpowiedzi otrzymasz odpowiednio 4 lub 5 punktów.

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

2.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

2.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

2.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

2.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

a) $g = -3$ b) $g = -1$ c) $g = -1/3$

d) $g = 0$ e) $g = 1/3$ f) $g = 1$ g) $g = 3$

Zadanie **3.**

W każdym z osiemnastu poniższych pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.
Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **max**(0, $n - 13$) **punktów**.

W poniższych formułach zmienna n przebiega zbiór $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_n |a_n - 5| < 1 + \frac{1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

3.1 ciąg (a_n) jest zbieżny

3.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny

3.3 $\forall_n a_n > 3$

3.4 $\exists_n a_n > 3$

3.5 $\forall_n a_n \leq 6$

3.6 $\exists_n a_n \leq 6$

3.7 $\forall_n a_n \neq \sqrt{37}$

3.8 $\exists_n a_n \neq \sqrt{37}$

3.9 $\forall_n a_n \neq \sqrt{17}$

3.10 $\exists_n a_n \neq \sqrt{17}$

3.11 $|a_1 - a_2| < 3$

3.12 $|a_2 - a_3| < 3$

3.13 $|a_3 - a_6| < \frac{5}{2}$

3.14 $|a_4 - a_5| < \frac{5}{2}$

3.15 $|a_1 - a_3| < 2$

3.16 $|a_{100} - a_{101}| < 2$

3.17 $|a_1 - a_3| > \frac{1}{10}$

3.18 $|a_{100} - a_{101}| > \frac{1}{10}$

Zadanie **4.**

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w n podpunktach otrzymasz **max**(0, $n - 1$) punktów.

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{dla } x < 0 \\ dx + e & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 1 \leq x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots\dots\dots, \quad e = \dots\dots\dots$

b) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = 4, \quad e = \dots\dots\dots$

c) $a = 1, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = 4, \quad e = 5$

d) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 7, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots\dots\dots$

e) $a = 6, \quad b = 7, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots, \quad e = 10$

f) $a = 6, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 8, \quad d = 9, \quad e = \dots\dots\dots$

Zadanie 5.

Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Zadanie 6.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie 7.

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \cdot x^n}{(2n)!}.$$

Zadanie 8.

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$