

21	22	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 11, 20.12.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 21. (6 punktów)

W zadaniu **21.1** za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-1)$ punktów.

W zadaniu **21.2** za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n-3)$ punktów.

21.1 (3 punkty) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a\{x\}^3 + b\{x\}^2 + c\{x\} + d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a = -5, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4$

b) $a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3, \quad d = 4$

c) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = 4$

d) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \text{NIE}$

21.2 (3 punkty) Podać wartości granic

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\pi/2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \arctg x = -\pi/4$

c) $\lim_{x \rightarrow -1/\sqrt{3}} \arctg x = -\pi/6$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg x = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \arctg x = \pi/3$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \pi/2$

Zadanie **22.** (5 punktów)

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q = 1/2$, $a = 3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.$$