

23	24	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 12, 3.01.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **23.** (5 punktów)

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 37}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt{x^2 + 37} - \sqrt{y^2 + 37} \right| = \left| \sqrt{x^2 + 37} - \sqrt{y^2 + 37} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}} \leq 1,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x + y| \leq \sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 37} + \sqrt{y^2 + 37}.$$

Zadanie **24.** (7 punktów)

W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **max**(0, $n - 10$) **punktów**.

Siódmy punkt za komplet poprawnych odpowiedzi.

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) **Z**

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **N**

c) ciągu (b_n) **N**

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ **R**

e) ciągu $(a_n + b_n)$ **N**

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ **R**

g) ciągu $(c_n + d_n)$ **R**

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ **R**

i) ciągu $(a_n + c_n)$ **Z**

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ **N**

k) ciągu $(a_n + d_n)$ **R**

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ **R**

m) ciągu $(b_n + c_n)$ **N**

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ **N**

o) ciągu $(b_n + d_n)$ **N**

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ **N**