

27	28	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 14, 17.01.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 27. (4+2=6 punktów)

Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|x - y|}{8 \cdot 8} = \frac{|x - y|}{64} \leq \frac{|x - y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/60$ i dowolnych $x, y \geq 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 8$ oraz $y = 9$ mamy $|x - y| = 1$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{72} > \frac{|x - y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$.

Zadanie **28.** (9 punktów)

W każdym z zadań **28.1-28.9** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

28.1. $A = \left\{ \frac{1}{x^2 + 9} : x \in (-2, 1) \right\}$ Ocena

$\inf A = 1/13$

$\sup A = 1/9$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

28.2. $B = \left\{ \frac{1}{x^3 + 9} : x \in (-2, 1) \right\}$ Ocena

$\inf B = 1/10$

$\sup B = 1$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

28.3. $C = \left\{ \frac{1}{x^4 + 9} : x \in (-2, 1) \right\}$ Ocena

$\inf C = 1/25$

$\sup C = 1/9$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

28.4. $D = \left\{ \frac{1}{10n - 43} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Ocena

$\inf D = -1/3$

$\sup D = 1/7$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

28.5. $E = \left\{ \frac{1}{(10n - 43)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf E = 0$

$\sup E = 1/9$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

28.6. $F = \left\{ \frac{1}{(10n - 43)^2 + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf F = 0$

$\sup F = 1/16$

Czy kres dolny należy do zbioru F **NIE** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

28.7. $G = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} : k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}$ Ocena

$\inf G = 0$

$\sup G = 1$

Czy kres dolny należy do zbioru G **NIE** Czy kres górny należy do zbioru G **TAK**

28.8. $H = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} : k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 11, 12, 13\} \right\}$ Ocena

$\inf H = 0$

$\sup H = 1/3$

Czy kres dolny należy do zbioru H **NIE** Czy kres górny należy do zbioru H **TAK**

28.9. $I = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} : k \in \{6, 7, 16, 17\} \right\}$ Ocena

$\inf I = 1/16$

$\sup I = 1/5$

Czy kres dolny należy do zbioru I **TAK** Czy kres górny należy do zbioru I **TAK**