

1	2	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 1, 4.10.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+1) \cdot \binom{2n}{n} = 4$ oraz $4^n = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} \geq 4^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+2)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)^2} = (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq \\ &\geq 4^n \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+2)(2n+1) \geq 4(n+1)(n+1),$$

$$(n+2)(2n+1) \geq 2(n+1)(n+1),$$

$$2n^2 + 5n + 2 \geq 2n^2 + 4n + 2,$$

$$n \geq 0,$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n .

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Zadanie 2. (5 punktów)

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

2.1 Czy równość $\binom{2012}{507} + \binom{2012}{n} = \binom{2013}{507}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 506$ TAK
- b) $n = 508$ NIE
- c) $n = 1506$ TAK
- d) $n = 1508$ NIE

2.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(9)$ NIE
- b) $T(10)$ NIE
- c) $T(11)$ NIE
- d) $T(12)$ NIE

2.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że **fałszywe** jest

- a) $T(9)$ NIE
- b) $T(10)$ NIE
- c) $T(11)$ NIE
- d) $T(12)$ NIE

2.4 Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ jest parzysta. Czy implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 100$ NIE
- b) $n = 101$ TAK
- c) $n = 102$ TAK
- d) $n = 103$ TAK