

3	4	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **2, 11.10.2011**, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **3.** (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+4) \cdot \binom{2n}{n} = 10$ oraz $2^{2n+1} = 8$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10 > 8$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2} = (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > \\ &> 2^{2n+1} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 2^{2n+1} \cdot 4 = 2^{2n+3}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geqslant 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(n+5)(2n+1) \geqslant 4(n+4)(n+1),$$

co kolejno przekształca się do

$$\begin{aligned} (n+5)(2n+1) &\geqslant 2(n+4)(n+1), \\ 2n^2 + 11n + 5 &\geqslant 2n^2 + 10n + 8, \end{aligned}$$

czyli $n \geqslant 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geqslant 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ oraz $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$6 \cdot \binom{4}{2} = 36 > 32 = 2^5.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{6}{3} = 7 \cdot 20 = 140 > 128 = 2^7.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ oraz dla $n=2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > 4,$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n=3$, to 2 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n=4$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ♠), że została udowodniona implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.

Zadanie 4. (5 punktów)

W każdym z dwóch poniższych zadań udziel czterech odpowiedzi.

W każdym z dwóch poniższych zadań za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 2)$ punktów**.

Za udzielenie 8 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **5 punktów**.

Za całe zadanie 4 nie można uzyskać dokładnie 4 punktów.

4.1 Zapisz ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6} = 0,1(6)$

b) $\frac{1}{8} = 0,125$

c) $\frac{1}{9} = 0,(1)$

d) $\frac{1}{11} = 0,(09)$

4.2 Podaj liczbę całkowitą k , dla której podana liczba jest wymierna

a) $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = 2$

b) $\sqrt{(5 - 4\sqrt{2})^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = -4$

c) $\sqrt{(5\sqrt{2} - 7)^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = -5$

d) $\sqrt{(7\sqrt{2} - 10)^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = 7$