

5	6	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 3, 18.10.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 5. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 9$ zachodzi nierówność

$$n^4 < 3^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 9$ mamy $n^4 = 3^8$ oraz $3^n = 3^9$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $3^8 < 3^9$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz $n \geq 9$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$n^4 < 3^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+1)^4 < 3^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= n^4 \cdot \frac{(n+1)^4}{n^4} < 3^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = \\ &= 3^n \cdot \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) < \\ &< 3^n \cdot \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n} + \frac{4}{n} + \frac{1}{n}\right) = \\ &= 3^n \cdot \left(1 + \frac{15}{n}\right) \leq 3^n \cdot \left(1 + \frac{15}{9}\right) < 3^n \cdot \left(1 + \frac{18}{9}\right) = 3^n \cdot 3 = 3^{n+1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności

$$(n+1)^4 < 3^{n+1}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 9$.

Zadanie **6.** (5 punktów)

W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz **$\max(0, n - 3)$ punktów**.

6.1 $10^{20000} < 10000! < 10^{50000}$

6.2 $10^{2000} < 2^{10000} < 10^{5000}$

6.3 $10^{10} < \binom{10000}{5} < 10^{20}$

6.4 $10^{10000} < 30^{10000} < 10^{20000}$

6.5 $10^{200} < 2^{2^{10}} < 10^{500}$

6.6 $10^{1000} < 666! < 10^{2000}$

6.7 $10^{10000} < 4444^{4444} < 10^{20000}$

6.8 $10^{20000} < 7777^{7777} < 10^{50000}$