

7	8	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **4, 25.10.2011**, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 7. (5 punktów)

W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi w n zadaniach otrzymasz **$\max(0, n - 3)$ punktów**.

$$8.1 \quad 10^{200} < (7 + 2\sqrt{2})^{500} < 10^{500}$$

$$8.2 \quad 10^{500} < (6 + 3\sqrt{2})^{500} < 10^{1000}$$

$$8.3 \quad 10^5 < \binom{1000}{3} < 10^{10}$$

$$8.4 \quad 10^{10} < \binom{1000}{4} < 10^{20}$$

$$8.5 \quad 10^{500} < 3^{2000} < 10^{1000}$$

$$8.6 \quad 10^{100000} < 35000! < 10^{200000}$$

$$8.7 \quad 10^{5000} < 2011^{2011} < 10^{10000}$$

$$8.8 \quad 10^{50} < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < 10^{100}$$

Zadanie 8. (7 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8 + 3n^6} - n^4}{7n^2 - 4n + 5} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 6C$ (zadanie za **5 punktów**).

Jeśli liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 4C$, możesz otrzymać **7 punktów**.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^8 + 3n^6} - n^4}{7n^2 - 4n + 5} &= \frac{\sqrt{n^8 + 3n^6} - n^4}{7n^2 - 4n + 5} \cdot \frac{\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4}{\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4} = \frac{n^8 + 3n^6 - n^8}{(7n^2 - 4n + 5) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} = \\ &= \frac{3n^6}{(7n^2 - 4n + 5) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} \end{aligned}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2 - 4n + 5) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} \leq \frac{3n^6}{(7n^2 - 4n^2 + 0) \cdot (\sqrt{n^8 + 0} + n^4)} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2 - 4n + 5) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} \geq \frac{3n^6}{(7n^2 - 0 + 5n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^8} + n^4)} = \frac{3}{12 \cdot 3} = \frac{1}{12} = C,$$

co daje zależność $D = 6C$ wystarczającą do rozwiązania za 5 punktów.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $4(n-1) \geq 0$ zamiast $4n \geq 0$ i wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \frac{3n^6}{(7n^2 - 4n + 5) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} &= \frac{3n^6}{(7n^2 - 4(n-1) + 1) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^6} + n^4)} \geq \\ &\geq \frac{3n^6}{(7n^2 - 0 + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 3n^8} + n^4)} = \frac{3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{8} = C, \end{aligned}$$

co daje zależność $D = 4C$ wystarczającą do rozwiązania za 7 punktów.