

11	12	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 6, 16.11.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 11. (5 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2 + 3n + 2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{n^3} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{(n+1)^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n + 2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 3n + 2) \cdot n}{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 3,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

Zadanie **12.** (5 punktów)

W każdym z dziewiętnastu poniższych pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.
Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 14)$ punktów**.

Ciąg (a_n) spełnia warunek $\forall_{\varepsilon \geq 1} \exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 1| \leq \varepsilon$.

Czy stąd wynika, że

12.1 ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

12.2 ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**

12.3 ciąg (a_n) jest ograniczony **TAK**

12.4 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

12.5 wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **NIE**

12.6 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie **NIE**

12.7 od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są nieujemne **TAK**

12.8 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów dodatnich **NIE**

12.9 w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych **TAK**

12.10 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz dodatni **NIE**

12.11 w ciągu (a_n) występuje co najmniej jeden wyraz nieujemny **TAK**

12.12 $\forall_n a_n > 0$ **NIE**

12.13 $\forall_n a_n \geq 0$ **NIE**

12.14 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$ **NIE**

12.15 $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n \geq 0$ **TAK**

12.16 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$ **NIE**

12.17 $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n \geq 0$ **TAK**

12.18 $\exists_n a_n > 0$ **NIE**

12.19 $\exists_n a_n \geq 0$ **TAK**