

13	14	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 7, 22.11.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **13.** (5 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie g , k oraz C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \frac{3n^2 + kn + 7}{2n^2 + 3n + 5} - g \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Rozwiązanie:

Liczba g musi być równa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + kn + 7}{2n^2 + 3n + 5},$$

skąd $g = 3/2$.

Przekształcamy lewą stronę nierówności

$$\left| \frac{3n^2 + kn + 7}{2n^2 + 3n + 5} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2 \cdot (3n^2 + kn + 7) - 3 \cdot (2n^2 + 3n + 5)}{2 \cdot (2n^2 + 3n + 5)} \right| = \left| \frac{(2k - 9) \cdot n - 1}{2 \cdot (2n^2 + 3n + 5)} \right|.$$

Dobieramy k tak, aby w liczniku otrzymać współczynnik przy n równy 0. Oznacza to, że $k = 9/2$.

Wykonujemy oszacowanie otrzymanego wyrażenia

$$\left| \frac{-1}{2 \cdot (2n^2 + 3n + 5)} \right| = \frac{1}{2 \cdot (2n^2 + 3n + 5)} \leq \frac{1}{2 \cdot (2n^2 + 0n + 0)} = \frac{1/4}{n^2},$$

co daje oszacowanie wymagane w treści zadania ze stałą $C = 1/4$.

Zadanie 14. (8 punktów)

W każdym z zadań **14.1-14.8** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

14.1. $A = \left\{ \frac{1}{n+4} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Ocena

$\inf A = 0$

$\sup A = 1/5$

Czy kres dolny należy do zbioru A **NIE** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

14.2. $B = \left\{ \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+5} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf B = -1/6$

$\sup B = 1/5$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

14.3. $C = \left\{ \frac{9^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf C = 0$

$\sup C = 9^8/8!$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

14.4. $D = \left\{ \frac{(-9)^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf D = -9^8/8!$

$\sup D = 9^8/8!$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

14.5. $E = \left\{ \frac{1}{5n-2011} : n \in \mathbb{N} \right\}$ Ocena

$\inf E = -1$

$\sup E = 1/4$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

14.6. $F = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf F = 0$

$\sup F = 4$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **NIE**

14.7. $G = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf G = -8$

$\sup G = 1$

Czy kres dolny należy do zbioru G **NIE** Czy kres górny należy do zbioru G **NIE**

14.8. $H = \{x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$ Ocena

$\inf H = -8$

$\sup H = 5$

Czy kres dolny należy do zbioru H **NIE** Czy kres górny należy do zbioru H **NIE**