

15	16	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 8, 29.11.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15.** (7 punktów dla P=10)

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} \quad \forall_{n \geq 3/\varepsilon_1} |a_n - 2| < \varepsilon_1 \quad \text{oraz} \quad \forall_{\varepsilon_2 > 0} \quad \forall_{n \geq 7/\varepsilon_2} |b_n - 3| < \varepsilon_2.$$

Niech $c_n = a_n + b_n$. Wskazać liczby naturalne r oraz $P < 24$ i udowodnić, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq P/\varepsilon} |c_n - r| < \varepsilon.$$

Maksymalna ocena za rozwiązanie zależy od liczby P i wynosi **(24-P)/2 punktów**.

Rozwiązanie:

Ciągi (a_n) oraz (b_n) są zbieżne odpowiednio do granic 2 i 3. Zatem ciąg (c_n) jest zbieżny do sumy granic równej $r = 5$.

Przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ oraz $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$ otrzymujemy odpowiednio

$$\forall_{n \geq 6/\varepsilon} |a_n - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i

$$\forall_{n \geq 14/\varepsilon} |b_n - 3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 14/\varepsilon$ zachodzą nierówności

$$|c_n - 5| = |a_n - 2 + b_n - 3| \leq |a_n - 2| + |b_n - 3| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

co kończy rozwiązanie z $P = 14$ (za 5 punktów).

Przyjmując $\varepsilon_1 = 3\varepsilon/10$ oraz $\varepsilon_2 = 7\varepsilon/10$ otrzymujemy odpowiednio

$$\forall_{n \geq 10/\varepsilon} |a_n - 2| < \frac{3\varepsilon}{10}$$

i

$$\forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n - 3| < \frac{7\varepsilon}{10}.$$

Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 10/\varepsilon$ zachodzą nierówności

$$|c_n - 5| = |a_n - 2 + b_n - 3| \leq |a_n - 2| + |b_n - 3| < \frac{3\varepsilon}{10} + \frac{7\varepsilon}{10} = \varepsilon,$$

co kończy rozwiązanie z $P = 10$ (za 7 punktów).

Zadanie **16.** (5 punktów)

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za poprawne odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

16.1 Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ NIE

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ NIE

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ TAK

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ NIE

16.2 Czy w podanym zbiorze istnieje element największy

a) $\left\{ \frac{2n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ NIE

b) $\left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ TAK

c) $\left\{ (7 - \sqrt{44})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ TAK

d) $\left\{ (7 - \sqrt{33})^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ NIE

16.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(9) \Rightarrow T(99)$ TAK

b) $T(8) \Rightarrow T(99)$ TAK

c) $T(9) \Rightarrow T(88)$ NIE

d) $T(8) \Rightarrow T(88)$ TAK

16.4 Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n}$ NIE

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}$ TAK

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{8^n}$ TAK

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{9^n}$ TAK