

Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Wykład: zad. 1-4

Konwersatorium 3.10.2011: zad. 38-41

Ćwiczenia 27.09 oraz 3.10.2011: zad. 5-37

Kolokwium nr 1, 4.10.2011: materiał z zad. 1-41

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi równość

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej
- $n \geq 6$
- kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na
- n
- kwadratów.

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi nierówność

$$1000000n < 2^n + 19000000.$$

4. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej
- n
- oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich
- $a_1, a_2, \dots, a_n$
- zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

5. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi równość

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi równość

$$(2^{2^0} + 1) \cdot (2^{2^1} + 1) \cdot (2^{2^2} + 1) \cdot (2^{2^3} + 1) \cdot (2^{2^4} + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

UWAGA: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

7. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- n
- zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

8. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- $n \geq 2$
- zachodzi równość

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

$$9. \sum_{i=3}^5 i^2 \quad 10. \sum_{i=-99}^{100} i^3 \quad 11. \sum_{i=-10}^{10} 7 \quad 12. \prod_{i=1}^5 i \quad 13. \prod_{i=-2008}^{2008} i^{2008}$$

14. Zapisać wzory występujące w treści poprzednich zadań bez użycia kropek.

15. Liczby a_n, b_n są określone wzorami $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2a_n^2 - b_n^2$ jest równa ± 1 .

OSZUSTWO 16. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110 \quad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność

$30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geq 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność

$$180 < 174.$$

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

19. Wskazać taką liczbę x , że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

20. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

21. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

22. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

23. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

24. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \dots \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

26. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{2n+3}{n} < \frac{3}{2} \cdot 4^n$.

27. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

28. O zdaniu¹ $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(10)$,
- b) prawdziwe jest $T(11)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

29. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
- f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

30. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

¹Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstraszaające.

31. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) fałszywe jest $T(3)$,
- b) fałszywe jest $T(11)$,
- c) prawdziwe jest $T(9)$,
- d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

32. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(5)$ jest fałszywe
- b) $T(10)$ jest prawdziwe
- c) $T(15)$ jest fałszywe
- d) $T(20)$ jest prawdziwe

33. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-3)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(37)$
- b) $T(38)$
- c) $T(10)$
- d) $T(11)$

34. Czy równość $2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 8, k = 2$
- b) $n = 10, k = 3$
- c) $n = 15, k = 4$
- d) $n = 17, k = 5$

35. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\prod_{n=2}^{15} n = 15!$
- b) $\prod_{n=5}^{24} n = 23!$
- c) $\prod_{n=-1}^{37} n = -37!$
- d) $\sum_{n=-28}^{29} n = 29$

36. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

- a) $T(27) \Rightarrow T(39)$
- b) $T(99) \Rightarrow T(100)$
- c) $T(63) \Rightarrow T(71)$
- d) $T(29) \Rightarrow T(57)$

37. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

38. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

39. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

40. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \dots \dots \dots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

41. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześciąt można podzielić na n sześciątów.