

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Wykład: zad. 42-46

Konwersatorium 10.10.2011: zad. 65-67

Ćwiczenia 10.10.2011: zad. 52-64

Kolokwium nr 2, 11.10.2011: materiał z zad. 1-67

42. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat jest równy 2.**43.** Czy liczba $0,(9) = 0,999999\dots$ jest wymierna czy niewymierna?**44.** Niech

$$x = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 3 \cdot 243 + \dots = \\ &= 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3x, \end{aligned}$$

skąd $x = -1/2$.

Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita?

Przykład **45.** Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \log_2 3 &= \frac{m}{n} \\ 2^{m/n} &= 3 \\ 2^m &= 3^n. \end{aligned}$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

46. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystać też warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

Zadania 47-51 to proste zadanka rachunkowe. Na ćwiczeniach prawdopodobnie wystarczy tylko porównać wyniki.

47. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci ułamka zwykłego.**48.** Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

49. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$ **50.** $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$ **51.** $(0,(037))^{0,(3)}$ **52.** Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

53. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

54. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

55. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.

56. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

57. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

58. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO 59.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

60. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

61. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

62. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

63. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?

64. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

65. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

66. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q > 1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n , gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n < q$ oraz $m/n > q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25 < 27$, $125 < 128$).

67. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

Nierówności.

Przykłady z wykładów

68. Oszacować liczbę $1000!$ od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

69. Oszacować od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{9n}.$$

70. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots$ zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstawić liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

71. To samo dla nierówności

$$n^4 \leq 2^n.$$

72. To samo dla nierówności

$$n^8 \leq 2^n.$$

Zastanówić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

73. Wskazać liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000} < 2^n.$$

Przykład 74. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^4 - 0}{5n^4 - 4n^4 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2/7$ oraz $D = 7$.

Przykład 75. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \geq \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1/9$ oraz $D = 2$.

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbb{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej)

$$76. \frac{n^4 + 2n^3 + n + 7}{4n^4 + n^2 + 15} \quad 77. \frac{n\sqrt{n+4} + 5}{\sqrt{n^3+4} + 1} \quad 78. \frac{2^n + 10n^2}{2^n + n^4}$$

$$79. \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} + \dots + \sqrt{2n^2}}{2n+5} \quad 80. \frac{n!}{n! + 10^n}$$

$$81. \frac{n^6 + 5n + 4}{2n^3 - n^2 + 7} \quad 82. \frac{\sqrt{n^7+9} + 6}{\sqrt[3]{n^4+15} + 8} \quad 83. \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{64n}}{\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \dots + \sqrt[3]{64n}}$$

$$84. \frac{x}{x^2+1} \quad (\text{tylko od góry, } x \in \mathbb{R}) \quad 85. \frac{6x^7 - 5x^5 + 7}{5x^7 - 2x^4 + 3} \quad (x \in (0, +\infty))$$

$$86. \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5} \quad (\text{szacowanie postaci } g \pm C/n) \quad 87. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$88. \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \quad (\text{szacowanie postaci } g \pm C/n)$$

$$89. \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad (\text{szacowanie postaci } g \pm C/n)$$

$$90. \text{ Oszacować } \sqrt[n]{n}.$$