

$$d = (9 - \sqrt{73})^{2013}$$

96. Która z liczb jest większa $2^{2^{1001}}$ czy $1000^{2^{1000}}$?

97. Która z liczb jest większa $\sqrt[10]{10}$ czy 1,25 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.

98. Która z liczb jest większa $\sqrt[45]{45}$ czy 1,08 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości $3^{19} = 1\,162\,261\,467$ i $5^{13} = 1\,220\,703\,125$.

99. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

100. Wskazać taką liczbę naturalną n , że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n.$$

101. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots\dots\dots$ zachodzi nierówność

$$n^{32} \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

102. $L = 3972^{257}$ **103.** $L = 257^{3972}$ **104.** $L = 700!$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

$$\mathbf{105.} \quad W(n) = \frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2} \quad \mathbf{106.} \quad W(n) = \frac{13n^2 - 10n + 3}{2n^2 + 7n - 1} \quad \mathbf{107.} \quad W(n) = \frac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7}$$

$$\mathbf{108.} \quad W(n) = \frac{7^n + 6^n + 2^n}{7^n + 5^n + 3^n} \quad \mathbf{109.} \quad W(n) = \sqrt{n^2 + n} - n \quad \mathbf{110.} \quad W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$\mathbf{111.} \quad W(n) = \frac{n^7 + 10n^3 + 3}{n^4 + 37} \quad \mathbf{112.} \quad W(n) = \frac{5n^8 - n^4 + 3}{5n^{10} - 4} \quad \mathbf{113.} \quad W(n) = \frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2}$$

$$\mathbf{114.} \quad W(n) = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n^6 + 2} + 2} \quad \mathbf{115.} \quad W(n) = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 1} + 1} \quad \mathbf{116.} \quad W(n) = \frac{\sqrt[5]{n^2 + 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 1} + 1}$$

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n}.$$

$$117. W(n) = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2} \quad 118. W(n) = \frac{3n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 7n - 2} \quad 119. W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n}.$$

$$120. W(n) = \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2} \quad 121. W(n) = \frac{4n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 7n - 2} \quad 122. W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{3n + 1}$$

$$123. W(n) = \sqrt{n^2 + n} - n \quad 124. W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$$

Zadania do samodzielnej powtórki.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

125. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+16} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} \leq 2C.$$

126. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+40} - \sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45} - \sqrt{4n+5}} \leq 5C.$$

127. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}.$$

128. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

129. Niech

$$G(1) = 1, \quad G(2) = 6, \quad G(3) = 5, \quad \text{oraz} \quad G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n.$$

130. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

131. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

132. Udowodnić nierówność

$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

Przypomnienie: Potęgowanie wykonujemy **od góry**, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

133. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt. Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

133.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(2008)$ jest prawdziwe
- b) $T(2009)$ jest prawdziwe
- c) $T(2013)$ jest fałszywe
- d) $T(2014)$ jest fałszywe

133.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(80) \Rightarrow T(92)$
- b) $T(81) \Rightarrow T(93)$
- c) $T(96) \Rightarrow T(76)$
- d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

133.3 Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\binom{999}{111} < \binom{999}{444}$
- c) $\binom{999}{333} < \binom{999}{666}$

- b) $\binom{999}{222} < \binom{999}{555}$
- d) $\binom{999}{444} < \binom{999}{777}$

133.4 Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sum_{i=1}^3 i = 6$
- c) $\prod_{i=1}^3 i = 6$

- b) $\sum_{i=1}^3 2 = 6$
- d) $\prod_{i=1}^3 2 = 6$

134. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt. Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

134.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(85)$ jest prawdziwe
- b) $T(93)$ jest prawdziwe
- c) $T(106)$ jest prawdziwe
- d) $T(120)$ jest prawdziwe

134.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(80) \Rightarrow T(95)$
- b) $T(130) \Rightarrow T(300)$
- c) $T(166) \Rightarrow T(111)$
- d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

134.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a) $T(5)$ jest prawdziwe
- b) $T(6)$ jest prawdziwe
- c) $T(7)$ jest fałszywe
- d) $T(8)$ jest fałszywe

134.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a) $T(7)$ jest prawdziwe
- b) $T(8)$ jest prawdziwe
- c) $T(9)$ jest fałszywe
- d) $T(10)$ jest fałszywe

135. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi przyznaj sobie $\max(0, n - 5)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$. Wówczas:

a) $T(70)$

b) $T(81)$

c) $T(92)$

d) $T(101)$

e) $T(140)$

f) $T(75) \Rightarrow T(105)$

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$

h) $T(51) \Rightarrow T(60)$

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$

j) $T(10) \Rightarrow T(12)$