

Ciągi.

Ćwiczenia 7.11.2011: zad. 136-169

Kolokwium nr 5, 8.11.2011: materiał z zad. 1-169

Ćwiczenia 14.11.2011: zad. 170-186

Kolokwium nr 6, 16.11.2011: materiał z zad. 1-196

Trochę teorii

Uwaga: Umieszczanie zmiennej pod kwantyfikatorem nie jest zgodne z obowiązującymi konwencjami, ale jest bardziej czytelne niż umieszczenie obok - dlatego pozwalam sobie na odstępstwo od panujących reguł.

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n < M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

TWIERDZENIA:

1. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIEŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZATKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geq 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

10. TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH.

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g , to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g .

11. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa za kilka tygodni.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń nieoznaczonych.

12. SZTUCZKI OPARTE NA WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Zadania

Wyjaśnić, dlaczego poniżej są same **BZDURY**:

136. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = 0$
 137. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = 0$
 138. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$
 139. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = k \cdot 0 = 0$

Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego podanym wzorem; obliczyć granice ciągów zbieżnych, rozstrzygnąć czy ciągi rozbieżne mają granicę niewłaściwą

140. $\frac{n}{n+7}$ 141. $2^n - \frac{1}{n}$ 142. $\frac{4n^2+3n}{n+1}$ 143. $\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$ 144. $\frac{5n^3+n^2-6}{3n^4+7}$
 145. $\frac{5n^4+n^2-6}{3n^4+7}$ 146. $\frac{5n^5+n^2-6}{3n^4+7}$ 147. $\frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+2}}$
 148. $\frac{1+2+4+\dots+2^n}{1+3+9+\dots+3^n}$ 149. $\frac{n}{1+\sqrt{n}}$ 150. $n \cdot (-1)^n$ 151. $\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^7}{n^3(1+7\sqrt{n+2})}$
 152. $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ 153. $\frac{3^0+3^1+3^2+3^3+\dots+3^n}{3^n}$ 154. $\frac{\sqrt{3^n+2^n}}{\sqrt{3^n+1}}$ 155. $\sqrt[n]{n}$
 156. $\sqrt[n]{n^2}$ 157. $\sqrt[n]{n+17}$ 158. $\sqrt{n^2+3n}-n$ 159. $n(\sqrt{n^2+7}-n)$
 160. $\frac{7n+(\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3+7n+3}$ 161. $\frac{(-1)^n}{n}$ 162. $\frac{1}{(2+(-1)^n)^n}$
 163. $a_n = \begin{cases} (-1)^n \cdot n! & \text{dla } n \leq 100 \\ \frac{2^n}{2^n+n} & \text{dla } n > 100 \end{cases}$ 164. $\frac{n^7}{7^n}$ 165. $\frac{10^n}{n!}$ 166. $\frac{n!}{n^{22}}$
 167. $\frac{\sqrt{3^n+n^2}}{\sqrt{3^n+2^n+1}}$ 168. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n}}$ 169. $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)^2}$
 170. $\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$ 171. $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}$

172. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\sqrt{9^n + n^{2010}}}$$

lub uzasadnić, że granica nie istnieje.

173. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3+k}{n^4+(-1)^k \cdot k^2}.$$

174. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + n^{22}}{\sqrt{4^{n+4} + n^{4444}}}$$

lub uzasadnić, że granica nie istnieje.

175. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \cdot \sqrt{n^2 + 1} - n^4 - \frac{n^2}{2} \right).$$

176. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{8n^2 + 1}}{\sqrt{2n^4 + 1}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 2}}{\sqrt{2n^4 + 2}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 3}}{\sqrt{2n^4 + 3}} + \frac{\sqrt{8n^2 + 4}}{\sqrt{2n^4 + 4}} + \dots + \frac{\sqrt{8n^2 + 3n}}{\sqrt{2n^4 + 3n}} \right).$$

PRAWDA CZY FAŁSZ?

177. Jeżeli ciąg (a_n) i (b_n) są rozbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

178. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

179. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, a ciąg (b_n) rozbieżny, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

180. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, ciąg (b_n) rozbieżny, a ponadto obydwa ciągi mają tylko wyrazy dodatnie, to ciąg $(a_n b_n)$ jest rozbieżny.

181. Jeżeli (a_n) jest ciągiem zbieżnym o wyrazach dodatnich, to jego granica jest liczbą dodatnią.

182. Jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, to $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

183. Jeżeli ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

184. Jeżeli ciąg (a_n^2) jest zbieżny, to ciąg (a_n) jest zbieżny.

185. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

186. Jeżeli wśród wyrazów ciągu (a_n) występują zarówno wyrazy mniejsze od 1 jak i większe od 3, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Twierdzenie o trzech ciągach. Przykłady z rozwiązaniami.

187. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^4 - n^2 + 1}{5n^5 - n^3 + 1} + \frac{3n^4 - 2n^2 + 4}{5n^5 - 2n^3 + 8} + \frac{3n^4 - 3n^2 + 9}{5n^5 - 3n^3 + 27} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} + \dots + \frac{3n^4 - 2n^3 + 4n^2}{5n^5 - 2n^4 + 8n^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - 0 + 4n^2}{5n^5 - 2n^4 + 0} = \frac{2n(3n^4 + 4n^2)}{5n^5 - 2n^4} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - kn^2 + k^2}{5n^5 - kn^3 + k^3} \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{3n^4 - 2n^3 + 0}{5n^5 - 0 + 8n^3} = \frac{2n(3n^4 - 2n^3)}{5n^5 + 8n^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 6/5,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6/5.$$

188. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + 3}{\sqrt{n^{10} + 3}} + \frac{5n^3 + 6}{\sqrt{n^{10} + 6}} + \frac{5n^3 + 9}{\sqrt{n^{10} + 9}} + \frac{5n^3 + 12}{\sqrt{n^{10} + 12}} + \dots + \frac{5n^3 + 6n^2}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $2n^2$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}} \leq \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 6n^2}{\sqrt{n^{10} + 0}} = \frac{2n^2(5n^3 + 6n^2)}{n^5} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 3k}{\sqrt{n^{10} + 3k}} \geq \sum_{k=1}^{2n^2} \frac{5n^3 + 0}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = \frac{2n^2 \cdot 5n^3}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^5}{\sqrt{n^{10} + 6n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{1 + 6n^{-8}}} = 10$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2(5n^3 + 6n^2)}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} (10 + 12n^{-1}) = 10,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 10.$$

189. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Dzieląc licznik i mianownik danego wyrażenia przez $n^{5/2}$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{n^k + 1}}{n^2 + 5 \cdot \sqrt[3]{n^7 + 7} + 7 \cdot \sqrt{n^5 + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^{1/2}} + 2 \cdot \sqrt[6]{n^{k-15} + \frac{1}{n^{15}}}}{\frac{1}{n^{1/2}} + 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n^{1/2}} + \frac{7}{n^{15/2}}} + 7 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{n^5}}}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia dąży do 7 przy $n \rightarrow \infty$, natomiast licznik ma granicę skończoną dodatnią dla $k = 15$ i granica licznika jest wtedy równa 2.

Odpowiedź: Przy $k = 15$ granica jest równa $2/7$.

Uwaga: Liczba $k = 15$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

190. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 1}{n^3 + \sqrt{n^6 + 1}} + \frac{4n^2 + 2}{n^3 + \sqrt{n^6 + 2}} + \frac{4n^2 + 3}{n^3 + \sqrt{n^6 + 3}} + \frac{4n^2 + 4}{n^3 + \sqrt{n^6 + 4}} + \dots + \frac{4n^2 + 6n}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $6n$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}} \leq \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + 6n}{n^3 + \sqrt{n^6 + 0}} = \frac{6n(4n^2 + 6n)}{2n^3} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + k}{n^3 + \sqrt{n^6 + k}} \geq \sum_{k=1}^{6n} \frac{4n^2 + 0}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = \frac{6n \cdot 4n^2}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n^3}{n^3 + \sqrt{n^6 + 6n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24}{1 + \sqrt{1 + 6n^{-5}}} = 12$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(4n^2 + 6n)}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (12 + 36n^{-1}) = 12,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 12.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 12.

Konwersatorium

191. Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_{n > 1000} |a_n - 100| < 10.$$

Czy stąd wynika, że

- a) ciąg (a_n) jest zbieżny,
- b) ciąg (a_n) jest rozbieżny,
- c) każdy wyraz ciągu (a_n) jest dodatni,
- d) ciąg (a_n) ma co najmniej jeden wyraz dodatni,
- e) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie,
- f) $a_{666} < 77777777$,
- g) $a_{1111} > 88$,
- h) $\forall_{n > 1729} |a_n - 100| < 1$,
- i) $\forall_{n > 345} |a_n - 100| < 17$,
- j) $\forall_{n > 5555} |a_n - 99| < 13$,
- k) ciąg (a_n) jest ograniczony,
- l) $\exists_{n > 444} |a_n - 95| < 37$,
- m) $\exists_{n > 4444} |a_n - 80| < 37$,
- n) $\exists_{n < 444} |a_n - 95| < 37$,
- o) $\exists_{n < 4444} |a_n - 80| < 37$,
- p) $\forall_m \exists_{n > m} a_n > 0$,
- q) $\forall_{n > 1331} |a_n - 66| > 12$,
- r) $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 7$,
- s) $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 17$,
- t) $\forall_{m > 123} \forall_{n > 45678} |a_n - a_m| < 27$,
- u) $\forall_{m > 1234} \forall_{n > 5678} |a_n - a_m| < 37$,
- v) $\exists_{m < 123} \exists_{n < 456} |a_n - a_m| < 3$,
- w) $\forall_{m > 12345} \forall_{n > 67890} |a_n + a_m| < 210$,
- x) $\forall_{m > 1296} \forall_{n > 7776} |a_n + a_m| < 222$,
- y) $\forall_{m > 1024} \forall_{n > 8192} |a_n + a_m| > 128$,
- z) $\exists_n a_n < 92$,
- ż) $\exists_n a_n > 91$.

192. Dany jest taki ciąg (a_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 5/\varepsilon} |a_n - 7| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (a_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |a_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n > 6$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} a_n < 7,01$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |a_n - 8| > 1/3$.

193. Dany jest taki ciąg (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 2| < \varepsilon.$$

Podać granicę ciągu (b_n) .

Wskazać taką liczbę M , że $\forall_n |b_n| < M$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n < 0$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} b_n > -3$.

Wskazać taką liczbę N , że $\forall_{n \geq N} |b_n - 2| > 1/10$.

194. Niech $c_n = a_n + b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są ciągami z poprzednich dwóch zadań. Dowieść, że wówczas ciąg (c_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |c_n - 5| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinna się znaleźć odpowiednio dobrana liczba.

195. Niech $d_n = a_n \cdot b_n$, gdzie (a_n) i (b_n) są jak poprzednio. Dowieść, że wówczas ciąg (d_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots} |d_n + 14| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinno się znaleźć odpowiednio dobrane wyrażenie zależne od ε .

196. Niech $e_n = 2a_n + 3b_n$. Dowieść, że wówczas ciąg (e_n) jest zbieżny, gdyż

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq \dots\dots\dots/\varepsilon} |e_n - \dots\dots| < \varepsilon.$$

W miejscu kropek powinny się znaleźć odpowiednio dobrane liczby.