

Kresy zbiorów.

Ćwiczenia 21.11.2011: zad. 197-229

Kolokwium nr 7, 22.11.2011: materiał z zad. 1-249

Definicja: Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z góry, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \leq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \leq M$$

nazywamy ograniczeniem górnym zbioru Z .**Definicja:** Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym z dołu, jeżeli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in Z} x \geq M.$$

Każdą liczbę rzeczywistą $M \in \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$\forall_{x \in Z} x \geq M$$

nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru Z .**Definicja:** Zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.**Definicja:** Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to kresem górnym zbioru Z nazywamy jego najmniejsze ograniczenie górne i stosujemy oznaczenie $\sup Z$. Istnienie takiego najmniejszego ograniczenia wynika z zasady ciągłości Dedekinda. Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, przyjmujemy $\sup Z = +\infty$. Ponadto przyjmujemy $\sup \emptyset = -\infty$. Analogicznie określamy kres dolny zbioru, oznaczany przez $\inf Z$.**Wniosek:** Jeżeli niepusty zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry, to liczba G jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \in Z} x \leq G$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in Z} x > G - \varepsilon.$$

Zadania.

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$197. \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \quad 198. \left\{ \frac{37^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$199. \left\{ \frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 200. \{x \in \mathbb{R} : x^4 \geq 5\}$$

$$201. \left\{ \frac{m^2 + n^2}{2mn} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\} \quad 202. \left\{ \frac{mnk}{m^3 + n^3 + k^3} : m, n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Niech A i B będą niepustymi ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych.Niech $a_1 = \inf A$, $a_2 = \sup A$, $b_1 = \inf B$, $b_2 = \sup B$. Co można powiedzieć o następujących kresach:

203. $\inf\{-a : a \in A\}$ **204.** $\sup\{a^2 : a \in A\}$ **205.** $\inf\{a^2 : a \in A\}$

206. $\sup\{a - b : a \in A, b \in B\}$ **207.** $\sup\{ab : a \in A, b \in B\}$

208. $\inf\{ab : a \in A, b \in B\}$

209. Zbiory A i B są niepuste i ograniczone. Zbiór B jest skończony i wszystkie jego elementy są różne od 0. Czy zbiór $\{\frac{a}{b} : a \in A, b \in B\}$ musi być ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

210. A jest takim niepustym zbiorem ograniczonym liczb rzeczywistych, że $\inf A = -3$, $\sup A = 2$. Jakie wartości mogą przyjmować kresy zbioru $\{|a| : a \in A\}$? Odpowiedź uzasadnić przykładem lub dowodem.

211. Podać przykład takich zbiorów A, B , że $\inf A = 2$, $\sup A = 7$, $\inf B = 3$, $\sup B = 10$, $\inf(A \cap B) = 4$, $\sup(A \cap B) = 6$, $A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Niepotrzebne skreślić.

W każdej parze ramek tylko jedna zawiera sensowne uzupełnienie tekstu matematycznego.

Twierdzenie 212. Niech A i B będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Niech $C = \{a - b : a \in A \wedge b \in B\}$. Wtedy $\inf C = \boxed{\inf A - \sup B} \boxed{\sup B - \inf A}$.

Dowód:

Niech $d = \inf A$ i $g = \sup B$. Wtedy z warunku $d = \inf A$ wynika, że

(1) $\boxed{\forall_{a \in A}} \boxed{\exists_{a \in A}} \boxed{a \leq d} \boxed{a \geq d}$

oraz

(2) $\boxed{\forall_{\varepsilon > 0}} \boxed{\exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{a \in A}} \boxed{\exists_{a \in A}} \boxed{a < d + \varepsilon} \boxed{a > d - \varepsilon}$.

Podobnie z warunku $g = \sup B$ wynika

(3) $\boxed{\forall_{b \in B}} \boxed{\exists_{b \in B}} \boxed{b \leq g} \boxed{b \geq g}$

oraz

(4) $\boxed{\forall_{\varepsilon > 0}} \boxed{\exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{b \in B}} \boxed{\exists_{b \in B}} \boxed{b < g + \varepsilon} \boxed{b > g - \varepsilon}$.

Chcemy wykazać, że $\inf C = e$, gdzie $e = \boxed{d - g} \boxed{g - d}$, czyli, że

(5) $\boxed{\forall_{c \in C}} \boxed{\exists_{c \in C}} \boxed{c \leq e} \boxed{c \geq e}$

oraz

(6) $\boxed{\forall_{\varepsilon > 0}} \boxed{\exists_{\varepsilon > 0}} \boxed{\forall_{c \in C}} \boxed{\exists_{c \in C}} \boxed{c < e + \varepsilon} \boxed{c > e - \varepsilon}$.

W dowodzie warunku (5) skorzystamy z (1) i (3).

Zakładając (5) wykażemy prawdziwość warunków (1) i (3).

Dowolna $\boxed{\text{Istnieje}}$ liczba $c \in C$ $\boxed{\text{jest}}$ $\boxed{\text{będąca}}$ postaci $c = a - b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Z nierówności $\boxed{a \leq d} \boxed{a \geq d}$ i $\boxed{b \leq g} \boxed{b \geq g}$ otrzymujemy $\boxed{a - b \leq e} \boxed{a - b \geq e}$, co dowodzi (5).

Założmy Wykażemy teraz prawdziwość warunku (6).

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy

Znajdziemy taką liczbę dodatnią ε , dla której

istnieje $a \in A$ takie, że $a > d - \varepsilon$ $a < d + \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $b \in B$ takie, że

$b < g + \varepsilon$ $b > g - \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem liczba $c = a - b$ spełnia nierówność

$c < e + \varepsilon$ $c > e - \varepsilon$, co kończy dowód warunku (6).

Wyznaczyć kres górny i dolny następujących zbiorów. Zbadać, czy podane zbiory zawierają swoje kresy:

$$213. \{x^2 : x \in (-4, 9)\} \quad 214. \left\{ \frac{n}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$215. \left\{ \frac{n!}{5^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 216. \left\{ \binom{2009}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 2009 \right\}$$

$$217. \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 218. \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{3} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$219. \{ \sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N} \} \quad 220. \{ \sqrt[n]{3} - \sqrt[m]{2} : m, n \in \mathbb{N} \}$$

$$221. \left\{ \frac{7}{n} - 3m : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 222. \left\{ \frac{m^2 + 4n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$223. \left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad 224. \left\{ \frac{3m^2 + 7n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$225. \{ (\sqrt{37} - 5)^n : n \in \mathbb{N} \} \quad 226. \{ (\sqrt{37} - 6)^n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$227. \{ (\sqrt{37} - 7)^n : n \in \mathbb{N} \} \quad 228. \{ (\sqrt{37} - 8)^n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$229. \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Konwersatorium

Przeczytaj poniższe warunki. Które z nich są równoważne temu, że $g = \sup A$?

$$230. \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < g + \varepsilon \right)$$

$$231. \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} |a - g| < \varepsilon \right)$$

$$232. \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - 2\varepsilon \right)$$

$$233. \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$234. \left(\forall_{a \in A} a \leq g \right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} a > g - \frac{1}{n} \right)$$

235. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} n^2(g-a) < \frac{1}{n}\right)$
236. $\left(\forall_{a \in A} a < g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a-g)^2 < \varepsilon\right)$
237. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} (a-g)^2 < \varepsilon\right)$
238. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > \varepsilon\right)$
239. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon < g} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
240. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{0 < \varepsilon < 1} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
241. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon\right)$
242. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a \geq g - \varepsilon\right)$
243. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon \geq 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$
244. $\left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
245. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
246. $\left(\exists_{a \in A} a^2 \geq 0\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{a \in A} \exists_{b \in A} b \geq \frac{g+a}{2}\right)$
247. $\left(\exists_{a \in A} a \leq g\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon\right)$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

248. W każdym z zadań **248.1-248.13** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

248.1. $A = \{x^2 : x \in (-3, 2)\}$

$\inf A = \dots\dots\dots \sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

248.2. $B = \{x^3 : x \in (-3, 2)\}$

$\inf B = \dots\dots\dots \sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

- 248.3.** $C = \left\{ \frac{1}{5n-13} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 $\inf C = \dots \quad \sup C = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C
- 248.4.** $D = \left\{ \frac{\sqrt[n]{2}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf D = \dots \quad \sup D = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D
- 248.5.** $E = \{n^2 - 5n : n \in \mathbb{N}\}$
 $\inf E = \dots \quad \sup E = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E
- 248.6.** $F = \left\{ \frac{13^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf F = \dots \quad \sup F = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F
- 248.7.** $G = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf G = \dots \quad \sup G = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G
- 248.8.** $H = \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf H = \dots \quad \sup H = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H
- 248.9.** $I = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2m^2 < 3n^2 \right\}$
 $\inf I = \dots \quad \sup I = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I
- 248.10.** $J = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^m > 3^n \right\}$
 $\inf J = \dots \quad \sup J = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J
- 248.11.** $K = \left\{ \frac{mn}{m^2 + 9n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf K = \dots \quad \sup K = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru K Czy kres górny należy do zbioru K
- 248.12.** $L = \left\{ 7n + \frac{n! + n^{2009} + 1}{n! + n^{2009} + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf L = \dots \quad \sup L = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru L Czy kres górny należy do zbioru L
- 248.13.** $M = \left\{ \frac{m+n}{p} : m, n, p \in \mathbb{N} \wedge m^2 > 2p^2 \wedge n^2 > 3p^2 \right\}$
 $\inf M = \dots \quad \sup M = \dots$
 Czy kres dolny należy do zbioru M Czy kres górny należy do zbioru M

249. W każdym z zadań **249.1-249.13** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

249.1. $A = \left\{ \frac{3}{n} - \frac{5}{m^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 $\inf A = \dots \quad \sup A = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

249.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf B = \dots \quad \sup B = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

249.3. $C = \left\{ x^n : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right) \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf C = \dots \quad \sup C = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

249.4. $D = \left\{ \sqrt{n^2 + 3} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf D = \dots \quad \sup D = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

249.5. $E = \{ \log_2(2n - 1) - \log_2 n : n \in \mathbb{N} \}$
 $\inf E = \dots \quad \sup E = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

249.6. $F = \left\{ \frac{n}{3n + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf F = \dots \quad \sup F = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru F Czy kres górny należy do zbioru F

249.7. $G = \left\{ \frac{n}{3n - 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf G = \dots \quad \sup G = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru G Czy kres górny należy do zbioru G

249.8. $H = \left\{ \frac{100^n}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf H = \dots \quad \sup H = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru H Czy kres górny należy do zbioru H

249.9. $I = \left\{ \frac{100^n}{(2n)!} : n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf I = \dots \quad \sup I = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru I Czy kres górny należy do zbioru I

249.10. $J = \left\{ \frac{mn^2}{m^2 + n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 $\inf J = \dots \quad \sup J = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru J Czy kres górny należy do zbioru J

249.11. $K = \{ |x + y| - |x| - |y| : x, y \in \mathbb{R} \}$
 $\inf K = \dots \quad \sup K = \dots$

Czy kres dolny należy do zbioru K Czy kres górny należy do zbioru K

$$\mathbf{249.12.} \quad L = \left\{ \frac{1}{5^n - 3^m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf L = \dots\dots\dots$ $\sup L = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru L Czy kres górny należy do zbioru L

$$\mathbf{249.13.} \quad M = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\inf M = \dots\dots\dots$ $\sup M = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru M Czy kres górny należy do zbioru M

Szeregi liczbowe.

Ćwiczenia 28.11.2011: zad. 250-275

Kolokwium nr 8, 29.11.2011: materiał z zad. 1-275

Ćwiczenia 5.12.2011: zad. 276-301

Kolokwium nr 9, 6.12.2011: materiał z zad. 1-339

Obliczyć $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a następnie znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

$$\mathbf{250.} \quad a_k = \frac{1}{7^k} \quad \mathbf{251.} \quad a_k = \frac{2^k + 5^k}{10^k}$$

$$\mathbf{252.} \quad \text{Dowieść, że } 4 < \sum_{n=1}^{127} \frac{1}{n} < 7.$$

$$\mathbf{253.} \quad \text{Dowieść, że szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \text{ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.}$$

Rozstrzygnąć, czy następujące szeregi są zbieżne

$$\mathbf{254.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad \mathbf{255.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \quad \mathbf{256.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2 + 1} \quad \mathbf{257.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

$$\mathbf{258.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 1}{n^3 + 6n^2 + 8n + 47} \quad \mathbf{259.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

$$\mathbf{260.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \quad \mathbf{261.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \quad \mathbf{262.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$

$$\mathbf{263.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad \mathbf{264.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad \mathbf{265.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} \quad \mathbf{266.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$\mathbf{267.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} \quad \mathbf{268.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad \mathbf{269.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\mathbf{270.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad \mathbf{271.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \quad \mathbf{272.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$$

$$\mathbf{273.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \mathbf{274.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} \quad \mathbf{275.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \pi}{n^\pi + e}$$

Które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne:

276. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 277. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 3^n}$ 278. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$
279. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n+1}{n}$ 280. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$ 281. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$
282. $1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\dots+1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}-\dots-\frac{1}{k}+\dots$ (k razy)
283. $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}-\dots-\frac{1}{k^2}+\dots$ (k razy)
284. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$ 285. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ 286. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$
287. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n}$ 288. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!}$ 289. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$ 290. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$
291. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ 292. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}}$ 293. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$
294. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$ 295. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$ 296. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) (-1)^n$

297. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

298. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

299. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k = 2 \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

300. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{4}.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

301. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

7. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

Konwersatorium

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

302. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

303. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

304. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

305. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

306. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

307. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

308. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

309. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

310. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

311. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

312. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

313. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

314. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa S . Czy stąd wynika, że zbieżny jest ciąg (a_n) , jeżeli

a) $S = 0$

b) $0 < S < 1$

c) $S = 1$

d) $S > 1$

315. Czy możemy stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **rozbieżny**, jeżeli wiemy, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{4}$

316. Podać sumę szeregu, jeżeli szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-6)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$

317. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

318. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^n}.$$

319. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+2)^{n+2}}.$$

Obliczyć sumę szeregu

320. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) \cdot (-1)^n}{n(n+1)}$

321. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Wyznaczyć kresy zbiorów

322. $\left\{ \sum_{n=1}^N \left(-\frac{1}{2}\right)^n : N \in \mathbb{N} \right\}$

323. $\left\{ \sum_{n=M}^N \left(-\frac{1}{2}\right)^n : M, N \in \mathbb{N} \wedge M < N \right\}$

324. $\left\{ \sum_{n=M}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n : M \in \mathbb{N} \right\}$

Zadania do samodzielnej powtórki.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

325. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3 + 64} - \sqrt{n^3 + 1} \right).$$

326. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^5 - 13n^2 + 1}.$$

327. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4 - 7n^3 + 1}{19n^6 - 13n^2 + 1}.$$

328. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

329. a) Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{2^n}.$$

b) Obliczyć jego sumę.

330. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 + k} - n}{k}.$$

331. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{2009}}{2^{n^2}}.$$

332. a) Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + n^2 + 1}$$

w zależności od parametru rzeczywistego **dodatniego** p .

b) Obliczyć sumę szeregu w podpunkcie **a)** dla **jednej** spośród tych wartości parametru p , dla których **szereg jest zbieżny**.

333. W każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

a) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

c) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

d) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

e) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$

f) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$

g) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n^2)$

h) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n^2)$

i) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$

j) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n^2)$

334. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 20/\varepsilon} |a_n + 5| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 30/\varepsilon} |b_n + 3| < \varepsilon.$$

Niech $c_n = a_n - 2b_n$. Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą r oraz liczbę naturalną P i udowodnić, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq P/\varepsilon} |c_n + r| < \varepsilon.$$

335. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \right).$$

336. W każdym z zadań **336.1-336.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$$\mathbf{336.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{2m-3} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\inf A = \dots \quad \sup A = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{336.2.} \quad B = \{\log_2(n+7) - \log_2 n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\inf B = \dots \quad \sup B = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{336.3.} \quad C = \left\{ \frac{(n!)^2}{2^{5n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf C = \dots \quad \sup C = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{336.4.} \quad D = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{mn}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf D = \dots \quad \sup D = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{336.5.} \quad E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf E = \dots \quad \sup E = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

337. W każdym z zadań **337.1-337.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$$\mathbf{337.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2-22} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\inf A = \dots \quad \sup A = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{337.2.} \quad B = \left\{ \frac{2n+1}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf B = \dots \quad \sup B = \dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{337.3.} \quad C = \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{337.4.} \quad D = \{x - 2y : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{337.5.} \quad E = \{|x - y| : x, y \in \mathbb{R} \wedge 16 < x \leq 28 \wedge 3 < y \leq 4\}$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

338. Podaj wartości granic.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2010} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2010n+1} \right)^{2010} = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{h)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2010n} = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n/2010} = \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{j)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^{2010}} = \dots\dots\dots$$

339. W każdym z 5 poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. Nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

339.1 Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

339.2 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

339.3 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

339.4 Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g . Co można wywnioskować o zbieżności ciągu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$

339.5 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba rzeczywista g . Co można wywnioskować o zbieżności ciągu (a_n) , jeżeli wiadomo, że

a) $g = 0$

b) $0 < g < 1$

c) $g = 1$

d) $1 < g$