

Ćwiczenia 12.12.2011: zad. 340-376

Kolokwium nr 10, 13.12.2011: materiał z zad. 1-376

Ćwiczenia 19.12.2011: zad. 377-396

Kolokwium nr 11, 20.12.2011: materiał z zad. 1-396

Konw. 12,19.12.2011: zad. 397-420

Kolokwium nr 12, 3.01.2012: materiał z zad. 1-420

Funkcje. Granica i ciągłość.**Uwaga:** Zapis $\operatorname{sgn}(x)$ oznacza znak liczby x : $\operatorname{sgn}(x) = 1$ dla $x > 0$ $\operatorname{sgn}(x) = 0$ dla $x = 0$ $\operatorname{sgn}(x) = -1$ dla $x < 0$ **Uwaga:** Zapis $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . $\{x\} = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .Naszkicować wykres funkcji f danej wzorem**340.** $\operatorname{sgn}(\sin x)$ **341.** $\{x\} - (\{x\})^2$

$$\mathbf{342.} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{dla } 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{343.} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \neq 2 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{dla } x = 2 \end{cases} \quad \mathbf{344.} \quad \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad \mathbf{345.} \quad \frac{1}{\{x\}}$$

$$\mathbf{346.} \quad \operatorname{sgn}(x^3 - x) \quad \mathbf{347.} \quad x^3 \operatorname{sgn}(x) \quad \mathbf{348.} \quad \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|$$

$$\mathbf{349.} \quad f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4| \quad \mathbf{350.} \quad f(x) = |x^2 - 8x + 15|$$

$$\mathbf{351.} \quad f(x) = x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2| \quad \mathbf{352.} \quad f(x) = \{\cos x\}$$

$$\mathbf{353.} \quad f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \arctg x \right] \quad \mathbf{354.} \quad f(x) = 2\{\sin x\} - \{2\sin x\}$$

$$\mathbf{355.} \quad f(x) = [x] + x \quad \mathbf{356.} \quad f(x) = \{x\} + x \quad \mathbf{357.} \quad f(x) = \left[\left| x - \frac{1}{2} \right| \right]$$

Obliczyć następujące granice:

$$\mathbf{358.} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{1}{x-7} - \frac{8}{x^2 - 6x - 7} \right) \quad \mathbf{359.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad \mathbf{360.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

$$\mathbf{361.} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} \quad \mathbf{362.} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x + 2} \quad \mathbf{363.} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$$

$$\mathbf{364.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad \mathbf{365.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2008} - 1}{x^{10} - 1} \quad \mathbf{366.} \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$\mathbf{367.} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} \quad \mathbf{368.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \mathbf{369.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$$

$$\mathbf{370.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \quad \mathbf{371.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \mathbf{372.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \mathbf{373.} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

$$\mathbf{374.} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1} \quad \mathbf{375.} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} - 1} \quad \mathbf{376.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$$

377. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ ax - b & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

378. Dla których wartości parametrów a, b funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła? Naszkicować wykres funkcji f dla każdej pary parametrów (a, b) , dla których funkcja f jest ciągła.

Do podanych f, x_0 i ε dobrać takie δ , aby

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

379. $f(x) = 2x, x_0 = 5, \varepsilon = 1/10$ **380.** $f(x) = 1/x, x_0 = 4, \varepsilon = 1/100$

381. $f(x) = x^2, x_0 = 1, \varepsilon = 1/50$ **382.** $f(x) = x^3, x_0 = 0, \varepsilon = 1/1000$

383. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 30, \varepsilon = 1/10$ **384.** $f(x) = x^4, x_0 = 10, \varepsilon = 10^{-10}$

OSZUSTWO 385. (przykład funkcji nieciągłej): Funkcja $f(x) = x^2$ jest nieciągła.

Dowód: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładając, że funkcja f jest ciągła, weźmy w definicji Cauchy'ego ciągłości $\varepsilon = 1$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla y spełniających nierówność $|y - x| < \delta$ zachodzi $|x^2 - y^2| < 1$.

Jednak ta ostatnia nierówność nie zawsze jest prawdziwa, gdyż dla $x > \frac{1}{\delta}$ i $y = x + \frac{\delta}{2}$ otrzymujemy $|x^2 - y^2| = x\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1$.

□

OSZUSTWO 386. (przykład funkcji ciągłej): Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Dowód: Oczywiście f jest ciągła w każdym punkcie oprócz 0, pozostaje więc wykazać ciągłość w 0. Przeprowadzimy dowód niewprost. Zakładając, że f jest nieciągła w 0, weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Wtedy istnieje takie $\delta > 0$, że dla x spełniających nierówność $|x| < \delta$ zachodzi $|f(x) - 0| \geq \frac{1}{2}$.

Ale biorąc $x = \frac{1}{\pi n}$, gdzie $n > \frac{1}{\pi\delta}$, otrzymujemy $f(x) = 0$ i $|x| < \delta$. Zatem $|f(x) - 0| = 0 < \frac{1}{2}$, skąd sprzeczność.

□

Wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f(x)| \leq M.$$

387. $f(x) = \frac{2x^4 + 13x^2 + 7}{5x^4 + x^2 + 2}$ **388.** $f(x) = \frac{5x^4 + x^2 + 2}{2x^4 + 13x^2 + 7}$ **389.** $f(x) = e^{\sin x}$

390. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$ **391.** $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

OSZUSTWO 392. Niech $f, g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że $f(0) = 5, f(1) = 7, g(0) = 8, g(1) = 4$. Wtedy istnieje takie $c \in (0, 1)$, że $f(c) = g(c)$.

Dowód: Z własności Darboux funkcji ciągłych zastosowanej do funkcji f wynika, że dla pewnego $c \in (0,1)$ mamy $f(c) = 6$. Podobnie, stosując własność Darboux do funkcji g otrzymujemy $g(c) = 6$. A zatem $f(c) = g(c)$, co należało dowieść. $\square$

Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu i podać poprawny dowód.

393. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

394. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji

$$f(x) = 2^x$$

przecina wykres funkcji

$$g(x) = x^n + 4,$$

jeżeli za jednostkę na osiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

Jak zmieni się odpowiedź, gdy wykonamy rysunek biorąc za jednostkę na osiach średnicę atomu (10^{-8} cm) lub średnicę jądra atomowego (10^{-13} cm)?

395. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$$

ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

396. Dowieść, że równanie

$$x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$$

ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$\mathbf{397.} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x}{2} \quad \mathbf{398.} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} \quad \mathbf{399.} \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5x + 4} + |x|$$

$$\mathbf{400.} \quad f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek

$$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\mathbf{401.} \quad f(x) = x^{10}, \quad x_0 = 2, \quad \varepsilon = 1/10 \quad \mathbf{402.} \quad f(x) = x^{100}, \quad x_0 = 5, \quad \varepsilon = 10^{-10}$$

$$\mathbf{403.} \quad f(x) = x^{1000}, \quad x_0 = 10, \quad \varepsilon = 10^{100} \text{ (tak, do plus setnej)}$$

$$\mathbf{404.} \quad f(x) = x^{1/10}, \quad x_0 = 1111, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach: Jeżeli funkcje f, g, h są określone w otoczeniu punktu $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (mogą nie być określone w samym x_0), a przy tym

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla x bliskich x_0 , to z istnienia i równości granic funkcji f oraz h w punkcie x_0 wynika

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

To samo stosuje się do granic jednostronnych.

Obliczyć granice

405. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^{1000})}{\sqrt{x}}$ **406.** $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\{1/x^{1000}\right\}$ (uwaga: część ułamkowa)

Korzystając ze zbieżności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

obliczyć

407. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}}$ **408.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{7x^2+5x+1}}$
409. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}$ **410.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ **411.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
412. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot f(x)}$, gdzie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
413. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$ **414.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

Dla podanej funkcji f wyprowadzić oszacowanie postaci

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdziwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

415. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$ **416.** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$
417. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$ **418.** $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$

419. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27-\delta, 27+\delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

420. Wskazać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C , a następnie udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2+2011}$.

Ćwiczenia 9.01.2012: zad. 421-438

Kolokwium nr 13, 10.01.2012: materiał z zad. 1-443

Ćwiczenia 16.01.2012: zad. 448-470

Kolokwium nr 14, 17.01.2012: materiał z zad. 1-470

Szeregi potęgowe.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
421. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^{10}} & 422. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} & 423. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n x^{2n+5} & 424. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\
425. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n} & 426. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} & 427. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^3} & 428. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} x^{6n}}{\sqrt{n}} \\
429. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^{2^n} & 430. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n x^{3n}}{(81n+2)^n} & 431. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} x^{n^3} & 432. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} x^n}{n^2}
\end{array}$$

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
433. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n+7} & 434. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} x^n & 435. \sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2} & 436. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} x^n \\
437. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(3n)!}{(2n)!(2n)!} x^n & & &
\end{array}$$

438. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^8}{n^{10} + 1} \cdot x^{3n}.$$

Konwersatorium 9,16.01.2012.

Obliczyć sumy szeregów potęgowych

$$439. \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad 440. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad 441. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

442. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

443. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

444. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie 100 i wyrazach dodatnich, że $a_n = n$ dla $n \leq 10$.445. Podać przykład takiego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżnego do $-\infty$, że $a_n = n$ dla nieskończenie wielu n .446. Podać przykład takiego szeregu rozbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest mniejsza od 1.

447. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ dla nieskończenie wielu n .

Uzupełnienie: liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe.

448. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right),$$

jeśli $b \neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

449. $\bar{z} = z^2$ **450.** $\bar{z} = z^{-1}$ **451.** $1+i = z^2$ **452.** $3+4i = z^2$

453. $-3+4i = z^2$ **454.** $z^2+z=i$ **455.** $z^2+iz=1$ **456.** $z = \bar{z}+1$

457. $z^2\bar{z} = 8i$ **458.** $z^4+10z^2+61=0$

459. $\begin{cases} z_1^2 = z_2 \\ z_2^2 = z_1 \end{cases}$ **460.** $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$

461. $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 1 \\ z_2 + iz_1 = 2 \end{cases}$ **462.** $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_2 = 1 \\ \bar{z}_1 + z_2 = i \end{cases}$

463. $z^5 = 1$ (**Wsk.** $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az \pm 1)(z^2 + bz \pm 1)$)

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

464. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z^2 \geq 0$ **465.** $3|z| \leq |z^2| + 1$ **466.** $|z| = |\bar{z} + 1|$

467. $|z+i| \leq |z-i|$ **468.** $\operatorname{Im} \frac{z}{z^2+1} = 0$ **469.** $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z} = 0$

470. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD , punkt A jest środkiem odcinka PC , punkt B jest środkiem odcinka AC . Punkt E leży na prostej PD , przy czym

$$\sphericalangle PQA + \sphericalangle PQB + \sphericalangle PQC = \sphericalangle PQD + \sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE .

Wykład.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z , że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0, +\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R = 0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R = +\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

$$471. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + in + 1} \quad 472. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + i} \quad 473. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + i} \quad 474. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2 + i}$$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

$$475. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n \quad 476. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2} \quad 477. \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

$$478. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad 479. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$$

Zadania powtórzeniowe.

EGZAMIN: Poniedziałek 23 stycznia 2012 r., godz. 12.20-15.20, s. HS, WS.

EGZAMIN POPRAWKOWY: Poniedziałek 6 lutego 2012 r., godz. nieznana.

480. W każdym z zadań **480.1-480.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$$480.1. A = \left\{ \frac{5m-2n}{mn} : m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \right\}$$

$$480.2. B = \left\{ \frac{m}{n+7} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$480.3. C = \{x^2 : x \in (-2, 1)\}$$

$$480.4. D = \{x^3 : x \in (-2, 1)\}$$

$$480.5. E = \{3x^2 + y^3 : x, y \in (-2, 1)\}$$

481. W każdym z zadań **481.1-481.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

481.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(2009) \Rightarrow T(3011)$

481.2 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **zbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$

481.3 Szereg liczbowy o wyrazach rzeczywistych $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest **zbieżny**. Czy stąd wynika, że **rozbieżny** jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2008a_n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1)$

481.4 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla } x \leq 0 \\ ex^3 + fx^2 + gx + h & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = 23, b = 24, c = 25, d = 26, e = 27, f = 28, g = 29, h = 30$

b) $a = 25, b = 16, c = 9, d = 4, e = 1, f = 0, g = 1, h = 4$

c) $a = 2, b = 3, c = 5, d = 7, e = 11, f = 13, g = 17, h = 19$

d) $a = 2009, b = 2010, c = 2011, d = 2008, e = 2009, f = 2010, g = 2007, h = 2008$

482. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2 \cdot \binom{2n+5}{n} < 3 \cdot 5^n.$$

483. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^k+1}{n^9+1} + \frac{n^k+2}{n^9+4} + \frac{n^k+3}{n^9+9} + \frac{n^k+4}{n^9+16} + \frac{n^k+5}{n^9+25} + \dots + \frac{n^k+n^2}{n^9+n^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

484. Wyznaczyć asymptoty funkcji f danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

485. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) , że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 6/\varepsilon} |a_n - 2| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq 10/\varepsilon} |b_n + 5| < \varepsilon.$$

Niech $c_n = a_n + b_n$. Wskazać odpowiednią liczbę rzeczywistą r oraz liczbę naturalną P i udowodnić, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{n \geq P/\varepsilon} |c_n + r| < \varepsilon.$$

486. Wyznaczyć przedział zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^{3n}}{\sqrt{n}}.$$

487. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu liczbowego o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + i}{n^7 - i}$$

w zależności od parametru całkowitego dodatniego p .

488. W każdym z zadań **488.1-488.4** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

488.1 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$

488.2 Czy zbieżny jest szereg

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$

488.3 Czy ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{n^k+1}{n^7+1} + \frac{n^k+2}{n^7+4} + \frac{n^k+3}{n^7+9} + \frac{n^k+4}{n^7+16} + \frac{n^k+5}{n^7+25} + \dots + \frac{n^k+n}{n^7+n^2}$$

jest zbieżny dla

a) $k=5$

b) $k=6$

c) $k=7$

d) $k=8$

488.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja $T(n+2) \Rightarrow T(n)$. Czy stąd wynika, że **fałszywa** jest implikacja

a) $T(2008) \Rightarrow T(3009)$

b) $T(2008) \Rightarrow T(3010)$

c) $T(2009) \Rightarrow T(3010)$

d) $T(3009) \Rightarrow T(2011)$

489. W każdym z zadań **489.1-489.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

489.1. $A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n : n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \right\}$

489.2. $B = \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$

489.3. $C = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 8]\}$

489.4. $D = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 16]\}$

489.5. $E = \{|2 - \log_2 x| : x \in (1, 32]\}$

490. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą dodatnią M i **dowieść**, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$M \leq \frac{14x^{2009} + x^{1111} + 15}{11x^{2009} + x^{666} + 9} \leq 5M.$$

491. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{2009}}{2n!}.$$

492. Naszkicować wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ |x| & \text{dla } a \leq x \leq b \\ x^2 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

dla każdej pary parametrów $a < b$, dla której funkcja f jest ciągła.

493. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^{2n} + x^n + x^n} \right)$$

w zależności od parametru naturalnego n .

494. Wyznaczyć promień zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}.$$

495. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}.$$

496. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b) , dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ ax^2 + b & \text{dla } x \in [-1, 2] \end{cases}$$

jest ciągła.

497. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią δ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (8 - \delta, 8 + \delta)$ zachodzi nierówność

$$|\sqrt[3]{x} - 2| < \frac{1}{100}.$$

498. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot x^{n^2}}{n^n}.$$

499. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \log_2(2^x + 1).$$

a) Wyznaczyć asymptoty funkcji f .

b) Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

500. Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [1, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2010 \cdot |x - y|.$$

501. Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \cdot z^{2n}}{n \cdot 2^n}.$$

502. Naszkicować wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 4| & \text{dla } a \leq x < b \\ 3 & \text{dla } b \leq x < c \\ |x^2 - 4| & \text{dla } x \geq c \end{cases}$$

dla każdej trójki parametrów $a < b < c$, dla której funkcja f jest ciągła.

503. Wyznaczyć przedział zbieżności rzeczywistego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(n!)^{2010}}.$$

504. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\log_2(2x^2 + 1) \right) - \left(\log_4(2x^6 + 1) \right) + \left(\log_8(2x^3 + 1) \right) \right).$$

505. W każdym z 4 poniższych zadań udziel 4 **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

505.1 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a^x & \text{dla } x < 0 \\ bx^2 + cx + d & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$

b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$

c) $a = 9, b = 5, c = 3, d = 1$

d) $a = 7, b = 2, c = 2, d = 3$

505.2 Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a^x & \text{dla } x < 1 \\ bx^2 + cx + d & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

a) $a = 4, b = 3, c = 2, d = 1$

b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$

c) $a = 9, b = 5, c = 3, d = 1$

d) $a = 7, b = 2, c = 2, d = 3$

505.3 Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$

505.4 Czy podany szereg jest zbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{2n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{n}}$

506. W każdym z zadań **506.1-506.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

506.1. $A = \left\{ \frac{1}{7n-30} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

506.2. $B = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$

506.3. $C = \left\{ \frac{1}{(7n-30)^3} : n \in \mathbb{N} \right\}$

506.4. $D = \left\{ \frac{1}{7m-30} + \frac{1}{(7n-30)^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

506.5. $E = \left\{ \frac{(\log_2(n^2+1)) \cdot \log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4)) \cdot \log_9(n^2+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$

507. W każdym z poniższych 9 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - 1|$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log_3(a_n^2 + 2)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1}$

508. Na każde z 8 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.

Czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 25| & \text{dla } x < a \\ 24 & \text{dla } a \leq x < b \\ |x^2 - 25| & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła, jeżeli

j) $a = -7, \quad b = -5$

k) $a = -7, \quad b = -3$

l) $a = -5, \quad b = -3$

m) $a = -5, \quad b = -1$

n) $a = -3, \quad b = -1$

o) $a = -3, \quad b = 1$

p) $a = -1, \quad b = 1$

q) $a = -1, \quad b = 3$

509. Na każde z 15 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.

Ciąg (a_n) jest zbieżny i jego granica jest równa 7. Czy stąd wynika, że

- a) $\forall_n a_n > 0$
 b) $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n > 0$
 c) $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n > 0$
 d) $\forall_n a_n < 7$
 e) $\exists_n a_n < 7$
 f) $\forall_N \exists_{n \geq N} a_n < 7$
 g) $\exists_N \forall_{n \geq N} a_n < 7$
 h) $\exists_x \forall_n a_n > x$
 i) $\exists_x \forall_n a_n < x$
 j) $\forall_N \exists_{n \geq N} |a_n - 7| < \frac{1}{10}$
 k) $\exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 7| < \frac{1}{10}$
 l) $\forall_N \exists_{n \geq N} |a_n - 7| < \frac{1}{n}$
 m) $\exists_N \forall_{n \geq N} |a_n - 7| < \frac{1}{n}$
 n) $\forall_N \exists_{n \geq N} |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{100}$
 o) $\exists_N \forall_{n \geq N} |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{100}$

Uwaga: Zmienne n, N przebiegają liczby naturalne, a zmienna x liczby rzeczywiste.

510. W każdym podpunkcie podaj przykład podzbioru lub podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych o podanych własnościach.

- a) $\inf A = -4, \quad \sup A = 4, \quad \inf\{a^2 : a \in A\} = 4$
 b) $\sup B = 2, \quad \sup C = 3, \quad \sup(B \cap C) = 1$
 c) $\inf D = 10, \quad \inf E = 10, \quad \inf(D \cap E) = 17$
 d) $\inf F = \inf G = 2, \quad \sup F = \sup G = 5, \quad$ zbiory F, G są rozłączne
 e) $0 < \sup H = \sup\{h^2 : h \in H\} < 1$

511. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot (-1)^n}{n^2 + 5}.$$

512. Wyznaczyć promień zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2} \cdot (n!)^n}{n^{n^2}}.$$

513. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{3x^2 - 2x + 5}{7x^2 - x + 5} \leq 24C.$$

514. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} + \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \frac{n+3}{n^2+3} + \frac{n+4}{n^2+4} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right).$$

515. W każdym z zadań **515.1-515.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{dla } x < 2 \\ x - n & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

515.1. $A = \{f_2(x) : x \in (-1, 4]\}$

515.2. $B = \{f_3(x) : x \in (-1, 4]\}$

515.3. $C = \{f_4(x) : x \in (-1, 4]\}$

515.4. $D = \{f_5(x) : x \in (-1, 4]\}$

515.5. $E = \{f_6(x) : x \in (-1, 4]\}$

516. Przy każdym z poniższych 9 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **Prawdą** (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **Fałszem** (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(77)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(3)$

b) $T(33)$

c) $T(333)$

d) $T(3) \Rightarrow T(333)$

e) $T(333) \Rightarrow T(3)$

f) $T(3) \Rightarrow T(33)$

g) $T(33) \Rightarrow T(3)$

h) $T(33) \Rightarrow T(333)$

i) $T(333) \Rightarrow T(33)$

517. Podaj wartości granic

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \dots$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \dots$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = \dots$

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = \dots$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \dots$

o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \dots$

518. Na każde z 15 pytań udziel odpowiedzi **TAK** lub **NIE**.

O zbiorze A wiadomo, że

$$\forall_{a \in A} a \leq 7 \quad \text{oraz} \quad \exists_{a \in A} a > 7 - \frac{1}{10}$$

Czy stąd wynika, że

- a) $\sup A = 7$
- b) $\sup A \leq 7$
- c) $\sup A \geq 7$
- d) $\sup A < 8$
- e) $\sup A > 6$
- f) $\inf A = 6,9$
- g) $\inf A < 7$
- h) $\inf A > 6$
- i) $\inf A > -8$
- j) $7 \in A$
- k) $7 \notin A$
- l) $\forall_{a \in A} |a - 7| < \frac{1}{10}$
- m) $\forall_{a \in A} |a - 7| > \frac{1}{10}$
- n) $\exists_{a \in A} |a - 7| < \frac{1}{10}$
- o) $\exists_{a \in A} |a - 7| > \frac{1}{10}$

519. W każdym z poniższych 14 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że wszystkie jego wyrazy są różne od zera, a ponadto

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
- h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

520. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+8}{n} < 2 \cdot 6^n.$$

521. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

522. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^8 - 7n^3 + 5}{9n^9 \sqrt{n} - 8n^4 + 7}.$$

523. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-3, 3]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} \cdot |x - y|,$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$.

524. W każdym z zadań **524.1-524.5** podaj kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

524.1. $A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

524.2. $B = \left\{ \frac{mn^2}{m^2 + n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

524.3. $C = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

524.4. $D = \left\{ \frac{1}{3 - \log_2(2n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$

524.5. $E = \left\{ \frac{1}{3 - \log_3(3n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$

525. W każdym podpunkcie podaj przykład podzbioru lub podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych o podanych własnościach.

- a) $\inf A = -3, \quad \sup A = 4, \quad \inf\{|a| : a \in A\} = 1$
- b) $\inf B = 2, \quad \inf C = 3, \quad \inf(B \cap C) = 7$
- c) $\sup D = 10, \quad \sup E = 10, \quad \sup(D \cap E) = 7$
- d) $\inf F = \inf G = 0, \quad \sup F = \sup G = 6, \quad \inf(F \cap G) = \sup(F \cap G)$
- e) $0 < \sup H = \sup\{h^4 : h \in H\} < 1$

526. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **różnych od zera**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 2.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

527. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$13n \leq 2^n + 36.$$

528. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^8 \sqrt{n} - 7n^3 + 5}{9n^9 - 8n^4 + 7}.$$

529. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5^n + 1} + \frac{5}{5^n + 2} + \frac{25}{5^n + 4} + \frac{125}{5^n + 8} + \frac{625}{5^n + 16} + \dots + \frac{5^n}{5^n + 2^n} \right).$$