

W dniu 26 września 2011 r. omawiamy test kwalifikacyjny.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie.

1. Dane są liczby naturalne m, n . Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ponadto, jeżeli, to dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna jednocześnie przez m oraz n wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez mn .

2. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

3. W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę dającą przy dzieleniu przez 72 resztę 5. Podać wszystkie rozwiązania.

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :

Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .

5. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 8? Przez 5?

6. Jakie reszty może dawać sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

9. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

10. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

11. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

12. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

13. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{13}.$$

14. Która liczba jest większa, $2^{23} \cdot 18^{10}$ czy $12^{15} \cdot 3^7$?

15. Ile zer końcowych ma liczba $33!$?

16. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

17. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

18. Obliczyć NWD($24!$, 24^{24}).

19. Obliczyć NWW(12^{12} , 18^{18}).

20. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianiem liczby całkowitej.

21. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + \text{coś}$.

22. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).

23. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.

Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).

24. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach. Które spośród liczb mniejszych od 30 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone? Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

25. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych dla dowolnej liczby naturalnej n .

a) liczba n jest nieparzysta

b) liczba n jest względnie pierwsza z 6

c) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 4

d) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 6

- e) jedna z liczb $n-1$, $n+1$ jest podzielna przez 8
- f) liczba n^2-1 jest podzielna przez 4
- g) liczba n^2-1 jest podzielna przez 8
- h) liczba n^2-1 jest podzielna przez 12
- i) liczba n^2-1 jest podzielna przez 16
- j) liczba n^2-1 jest podzielna przez 24

26. Dowieść, że w ciągu 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2007.

27. Niech $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ będzie iloczynem liczb naturalnych nie większych od n i będących tej samej parzystości, co n . Ile zer końcowych mają liczby $34!!$ oraz $35!!$?

28. Dowieść, że iloczyn dowolnych czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o jeden jest kwadratem liczby całkowitej.

29. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej. Nie używać kalkulatora!!!

$$a = 3$$

$$b = \sqrt{7 + \sqrt{10}}$$

$$c = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$d = \sqrt{10}$$

$$e = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$f = \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$$

30. Obliczyć

- a) NWD(254678914^{37} , 10^{43})
- b) NWD(472851364^{43} , 2^{50})
- c) NWD(100000008^{25} , 12^{16})
- d) NWD(100000011^{44} , 300^{300})
- e) NWD(200000004^{31} , 24^{24})
- f) NWD(18465210275^{44} , 10^{47})
- g) NWD(7771428426328^{60} , 14^{37})
- h) NWD(1122334455666^{50} , 44^{37})
- i) NWD(12468945716272^{29} , 14^{17} , 330^{23})
- j) NWD(1352263965789126^{44} , 26^{19} , 39^{22})

31. Wskazać najmniejszą (o ile taka w ogóle istnieje) liczbę naturalną k , dla której podane wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych m , n i (ewentualnie) r .

- a) $3^k | mn \Rightarrow (3^3 | m \vee 3^3 | n)$
- b) $5^k | mn \Rightarrow (5^2 | m \vee 5^7 | n)$
- c) $7^k | mnr \Rightarrow (7^5 | m \vee 7^3 | n \vee 7^{12} | r)$
- d) $4^k | mnr \Rightarrow (4^5 | m \vee 4^3 | n \vee 4^{12} | r)$

$$e) 6^k | mnr \Rightarrow (6^5 | m \vee 6^3 | n \vee 6^{12} | r)$$

32. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej

$$a = 90 \cdot 60^9$$

$$b = 15^3 \cdot 120^7$$

$$c = 2^7 \cdot 30^{11}$$

$$d = 60^{10}$$

$$e = 40^6 \cdot 45^5$$

$$f = 72^6 \cdot 5^{10}$$

$$g = 5^{11} \cdot 50000^2$$

33. Pani napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby. Niestety, tylko dwóch uczniów podało własności poprawne, a trzeci uczeń się pomylił. Który uczeń popełnił błąd?

Wersja I

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

Wersja II

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 32.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 7.

Wersja III

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 19.

Bonifacy: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 3.

Wersja IV

Pankracy: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

Serwacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 2004.

Bonifacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2005.

Wersja V

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianiem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 444.

Bonifacy: Napisana liczba jest nieparzysta.

Wersja VI

Pankracy: Napisana liczba jest sześcianiem liczby całkowitej.

Serwacy: Napisana liczba kończy się cyframi 2222.

Bonifacy: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 43.

34. Uprościć wyrażenia

$$a) \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}$$

- b) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^6}$
 c) $(2^{2^{2007}} - 1) \cdot (2^{2^{2007}} + 1)$
 d) $(3^{669} - 1) \cdot (9^{669} + 3^{669} + 1)$
 e) $\frac{2^{2007} + 1}{2^{669} + 1}$

35. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

- a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$
 b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$
 c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$
 d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$
 e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$
 f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$
 g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$
 h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$
 i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$
 j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$
 k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$
 l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

Uwaga: Przyjmujemy, że w postępie geometrycznym wszystkie wyrazy są różne od zera.

36. Obliczyć sumy postępów (ciągów) arytmetycznych i geometrycznych.

- a) $1+2+3+\dots+n$
 b) $3+4+5+\dots+n$
 c) $1+2+4+\dots+2^n$
 d) $1+3+9+\dots+3^{2007}$
 e) $2^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + 3^n$
 f) $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + \dots + 103$
 g) $4+6+9+\dots+\frac{3^{100}}{2^{98}}$
 h) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$
 i) $7+9+11+13+\dots+(6n+1)$
 j) $5+15+25+35+45+55+65+\dots+(100n+55)$
 k) $5+8+11+14+\dots+101$
 l) $-17-13-9-\dots+99$
 m) $27+81+243+\dots+3^{33}$
 n) $1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+\dots+2^n$

37. Drugi, piąty i dziesiąty wyraz pewnego postępu arytmetycznego tworzą postęp geometryczny trójwyrazowy. Jaki jest iloraz tego postępu geometrycznego?

38. Obliczyć $1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 19 + \dots + 1000$,
gdzie różnice między kolejnymi składnikami tworzą ciąg okresowy
 $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

39. Obliczyć

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2187},$$

gdzie w mianownikach znajdują się potęgi dwójki i trójki ustawione rosnąco.

40. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0 co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

41. Rozwiązać nierówności

a) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$

b) $\sqrt{x^2+27} > 2x$

c) $x^2 \geq \frac{1}{x}$

d) $x^3 \geq \frac{1}{x}$

e) $x(x^2+8x^8) \leq x(x^2+x^8)$

f) $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2007} + 2007$

g) $\sqrt{x^2+2007} \leq \sqrt{3x^2+1999}$

h) $|||x-1|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$

i) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$

j) $|x^2-25| < 24$

k) $(x+5)^{2007} + (x+5)^3 < (3x+1)^{2007} + (3x+1)^3$

l) $(x^2+1)^{x+2} \leq (x^2+1)^{x^2}$

42. Która z liczb jest większa

a) $123456 \cdot 123458$ czy 123457^2

b) $1000!$ czy 1000^{1000}

c) $1000!$ czy 100^{900}

d) $1000!$ czy $(500!)^2$

e) $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

f) $(\sqrt[4]{83}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{83}-2)^{666}$

g) $(\sqrt[4]{79}-2)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-2)^{666}$

h) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{666}$

- i) $(\sqrt[4]{79}-3)^{2007}$ czy $(\sqrt[4]{79}-3)^{667}$
 j) $2^{100!}$ czy $9^{99!}$
 k) 2^{1000} czy 3^{700}
 l) 5^{444} czy 3^{700}
 m) $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$
 n) $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$
 o) $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$
 p) $\frac{17^{666}}{3333^4 + 6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$
 q) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$
 r) $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$
 s) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$
 t) $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$
 u) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$
 v) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12
 w) $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$
 x) $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$
 y) $(\sqrt{37}-6)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$
 z) $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$

43. W miejsce kropek wstawić największą/najmniejszą (cokolwiek jest sensowne) liczbę, przy której podana implikacja jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n

- a) $24|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^2$
 b) $18|n^3 \Rightarrow \dots\dots|n^3$
 c) $60|n^5 \Rightarrow \dots\dots|n^5$
 d) $n^2|24 \Rightarrow n^2|\dots\dots$
 e) $n^3|10! \Rightarrow n^3|\dots\dots$
 f) $54|n^2 \Rightarrow \dots\dots|n^3$
 g) $n^5|12^8 \Rightarrow n|\dots\dots$
 h) $8^8|n^{10} \Rightarrow \dots\dots|n$

Lista powtórkowa do kolokwium nr 1 (3 listopada 2011)

Uwaga: To są zadania do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium będzie zakładało umiejętność rozwiązania zadań 1-78 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

44. Czy równość

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 0, b = 2007$;
- b) $a = 2007, b = 2008$;
- c) $a = -2007, b = 0$;
- d) $a = 2007, b = -2007$?

45. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że

- a) $n^2 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- b) $n^5 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- c) $n^3 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$;
- d) $n^4 = 4^9 \cdot 3^{28} \cdot 6^{12}$?

46. Czy równość $\sqrt{x^2} = x$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 2^{448} - 4^{336}$;
- b) $x = 16^{112} - 2^{448}$;
- c) $x = 4^{336} - 8^{224}$;
- d) $x = 8^{224} - 16^{112}$?

47. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{111}

- a) 6256544265423562514^{70} ;
- b) 1547578087823541024^{40} ;
- c) 4777247245432274100^{60} ;
- d) 8759859808595634036^{50} ?

48. Czy dla dowolnych liczb naturalnych a, b

- a) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWD}(a, b)$;
- b) liczba $\text{NWW}(a, b)$ jest podzielna przez b ;
- c) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez $\text{NWW}(a, b)$;
- d) liczba $\text{NWD}(a, b)$ jest podzielna przez a ?

49. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2 jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n^2 jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 4$;
- b) $d = 36$;
- c) $d = 12$;
- d) $d = 24$?

50. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ zachodzi równość

- a) $a_1 + a_{10} = a_3 + a_7$;
- b) $a_3 + a_9 = 2a_6$;
- c) $a_2 + a_9 = a_5 + a_6$;
- d) $a_3 + a_8 = 2a_5$?

51. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Czy dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n - S(n)$ jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 9;
- c) 4;
- d) 5?

52. Czy dla dowolnej liczby pierwszej $p > 10$ podana liczba jest podzielna przez 3

- a) $p + 2$;
- b) $p^2 + 7$;
- c) $p + 3$;
- d) $p^2 + 5$?

53. Czy dla dowolnego postępu geometrycznego trójwyrazowego a_1, a_2, a_3 podany niżej ciąg jest postępowem geometrycznym

- a) $a_1 + 7, a_2 + 7, a_3 + 7$;
- b) $\sqrt[7]{a_1}, \sqrt[7]{a_2}, \sqrt[7]{a_3}$;
- c) $7a_1, 7a_2, 7a_3$;
- d) a_1^7, a_2^7, a_3^7 ?

54. Czy istnieją dwie liczby naturalne, których największy wspólny dzielnik stanowi $p\%$ ich najmniejszej wspólnej wielokrotności, jeżeli

- a) $p = 20$;
- b) $p = 50$;
- c) $p = 30$;
- d) $p = 40$?

55. Czy podana liczba jest kwadratem liczby naturalnej

- a) $6^5 \cdot 8^3$;
- b) $6^5 \cdot 24^3$;
- c) $6^5 \cdot 12^3$;
- d) $6^5 \cdot 18^3$?

56. Czy równość

$$a^4 \cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 2, b = 5/2$;
- c) $a = 3, b = 2$;
- d) $a = 3, b = 3/2$?

57. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że

- a) liczba $p+23$ jest pierwsza;
- b) liczba $p+29$ jest pierwsza;
- c) liczba $p+25$ jest pierwsza;
- d) liczba $p+27$ jest pierwsza?

58. Czy $\text{NWW}(a, b, c) = abc$, jeżeli

- a) $a = 3, b = 5, c = 7$;
- b) $a = 3, b = 20, c = 25$;
- c) $a = 3, b = 6, c = 8$;
- d) $a = 3, b = 9, c = 15$?

59. Czy prawdziwa jest równość

- a) $3 \cdot \binom{11}{4} = 2 \cdot \binom{11}{5}$;
- b) $3 \cdot \binom{19}{7} = 2 \cdot \binom{19}{8}$;
- c) $3 \cdot \binom{14}{5} = 2 \cdot \binom{14}{6}$;
- d) $3 \cdot \binom{17}{6} = 2 \cdot \binom{17}{7}$?

60. Spośród dowolnych k różnych liczb naturalnych można wybrać takie 3 różne liczby a, b, c , że obie liczby $a-b$ oraz $b-c$ są podzielne przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $k = 9, n = 5$;
- b) $k = 30, n = 15$;
- c) $k = 11, n = 7$;
- d) $k = 21, n = 10$?

61. Dla dowolnej liczby naturalnej n , liczba n^2 jest podzielna przez a wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez b . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $a = 6, b = 18$;
- b) $a = 48, b = 24$;
- c) $a = 12, b = 54$;
- d) $a = 24, b = 36$?

62. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $6 \cdot 8^7$;
- b) $6 \cdot 24^7$;
- c) $6 \cdot 9^7$;
- d) $6 \cdot 12^7$?

63. Czy podaną liczbę można przedstawić w postaci $m^2 \cdot n^3$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi

- a) $(10!)^{10} \cdot 17$;
- b) $(13!)^{13} \cdot 11$;
- c) $(11!)^{11} \cdot 15$;
- d) $(12!)^{12} \cdot 13$?

64. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sqrt{(6-\sqrt{55})^{12}} = (6-\sqrt{55})^6$;
 b) $\sqrt{(9-\sqrt{55})^{18}} = (9-\sqrt{55})^9$;
 c) $\sqrt{(7-\sqrt{55})^{14}} = (7-\sqrt{55})^7$;
 d) $\sqrt{(8-\sqrt{55})^{16}} = (8-\sqrt{55})^8$?

65. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $5 - \sqrt{24} < \frac{1}{10}$;
 b) $\sqrt{51} - 7 < \frac{1}{7}$;
 c) $\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}$;
 d) $7 - \sqrt{47} < \frac{1}{7}$?

66. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2\sqrt{2} < 3$;
 b) $4\sqrt[3]{2} < 5$;
 c) $3\sqrt{3} < 5$;
 d) $5\sqrt{5} < 11$?

67. 3-ci, 4-ty i 6-ty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (w tej kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Czy stąd wynika, że postęp geometryczny tworzą także wyrazy (z zachowaniem kolejności):

- a) 3-ci, 5-ty, 11-ty ;
 b) 3-ci, 6-ty, 12-ty ;
 c) 4-ty, 6-ty, 10-ty ;
 d) 6-ty, 8-my, 11-ty ?

68. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{22}} < \frac{10}{11}$;
 b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{5^k} + \dots + \frac{1}{5^{55}} < \frac{3}{11}$;
 c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{3^{33}} < \frac{5}{11}$;
 d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{4^{44}} < \frac{4}{11}$?

69. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego, o wyrazach będących liczbami naturalnymi, jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2008$;
- b) $n = 2011$;
- c) $n = 2009$;
- d) $n = 2010$?

70. Podać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b

- a) $a = 12^{18}$, $b = 18^{12}$,
 $\text{NWD}(a,b) = \dots\dots\dots$ $\text{NWW}(a,b) = \dots\dots\dots$
- b) $a = 11!$, $b = 12$,
 $\text{NWD}(a,b) = \dots\dots\dots$ $\text{NWW}(a,b) = \dots\dots\dots$
- c) $a = 4^{20} \cdot 6^{15}$, $b = 4^{15} \cdot 6^{20}$,
 $\text{NWD}(a,b) = \dots\dots\dots$ $\text{NWW}(a,b) = \dots\dots\dots$
- d) $a = 10!$, $b = 11$,
 $\text{NWD}(a,b) = \dots\dots\dots$ $\text{NWW}(a,b) = \dots\dots\dots$

71. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(52714014^8, 2^{13}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWD}(80000025^8, 30^{13}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(4852000017^8, 10^{11}, 21^{14}) = \dots\dots\dots$

72. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $x^{1000} \leq x^{2007} \dots\dots\dots$
- b) $x^{1001} \leq x^{2008} \dots\dots\dots$
- c) $x^{1001} \leq x^{2007} \dots\dots\dots$
- d) $x^{1000} \leq x^{2008} \dots\dots\dots$

73. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $|x - 4| < 3 \dots\dots\dots$
- b) $|x + 3| \geq 2 \dots\dots\dots$
- c) $|x - 3| \leq 4 \dots\dots\dots$
- d) $|x - 3| < |x - 4| \dots\dots\dots$

74. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $4 \leq x^2 \leq 9$
- b) $1 \leq |x - 3| \leq 2$
- c) $-1 \leq x^2 \leq 4$
- d) $3 \leq |x| \leq 4$

75. Podać NWD i NWW

- a) $\text{NWD}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- b) $\text{NWW}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$
- c) $\text{NWW}(60^{60}, 90^{90}) = \dots\dots\dots$
- d) $\text{NWD}(1133^{2266}, 2266^{1133}) = \dots\dots\dots$

76. Podać liczbę zer końcowych danej liczby

- a) $2008571939215^{50} \cdot 2008571939032^{22}$
- b) $2008571939125^{20} \cdot 2008571939214^{55}$
- c) $2008571939025^{40} \cdot 2008571939028^{33}$
- d) $2008571939350^{30} \cdot 2008571939122^{44}$

77. Podać taką liczbę p , że liczba p po zwiększeniu o $p\%$ daje n

- a) $n = 24$ $p = \dots\dots\dots$
- b) $n = 600$ $p = \dots\dots\dots$
- c) $n = 39$ $p = \dots\dots\dots$
- d) $n = 75$ $p = \dots\dots\dots$

78. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{17} + 6^{17}$
- b) $13^{20} - 12^{20}$
- c) $13^{18} - 8^{18}$
- d) $13^{19} - 10^{19}$