79. Uprościć wyrażenia

a) $4^{2+\log_2 7}$

b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$

c) $\log_6 2 + \log_{36} 9$

80. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$

b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$

e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$

f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

g) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

81. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$

c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$

d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$

e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$

f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$

i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$

m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$

n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$

o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różna od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

82. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$, jeżeli
a) $a=2,\ b=2$
b) $a=3/2,\ b=3$
c) $a=2,\ b=3$
d) $a=3/2,\ b=2$
e) $a=5,\ b=5/4$

83. Czy jest prawdą, że $a\cdot\log_7 b=b\cdot\log_7 a$, jezeli
a) $a=2,\ b=3$
b) $a=2,\ b=4$
c) $a=2,\ b=5$
d) $a=3,\ b=4$
e) $a=64/27,\ b=256/81$

84. Czy jest prawdą, że
a) $2\cdot\log_3 5=\log_3 10$
b) $2\cdot\log_3 5=\log_3 25$
c) $2+\log_3 5=\log_3 10$
d) $2+\log_3 5=\log_3 45$
e) $\sqrt{(2-\log_3 7)^2}=2-\log_3 7$
f) $\sqrt{(2-\log_2 7)^2}=2-\log_2 7$
g) $\sqrt{(2-\log_5 23)^2}=2-\log_5 23$
h) $\sqrt{(2-\log_4 17)^2}=2-\log_4 17$

85. Dla których liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba
$$\frac{\log_m(mn)\cdot\log_n(mn)}{\log_m(mn)+\log_n(mn)}$$
jest wymierna, a dla których niewymierna?

86. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

87. Czy liczba
$$2^{\log_3 5}-5^{\log_3 2}$$
jest wymierna czy niewymierna?

88. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

89. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x.

90. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

a) $[x]=-4,\ \ \{x\}<1/10$

b) $[x]=-4,\ \ \{x\}>9/10$

c) $2\cdot\{x\}\neq\{2x\},\ \ x<0$

d) $2\cdot\{x\}=\{5x\},\ \ x>10$

91. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y, że

a) $[x+y]\neq[x]+[y]$

b) $[2x+y]=2[x]+[y]+2$

c) $[x+y]=\{x\}+\{y\},\quad x,y>0$

d) $[xy]=[x]\cdot[y]+10$

92. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a]=[x]+a$.

93. Rozwiązać nierówności

a) $\log_{2x}(x^2+1)\leqslant\log_{2x}(x^2+3x)$

b) $(x^2+x+1)^{3x}>(x^2+x+1)^{x+1}$

c) $x^4-5x^2+4<0$

d) $\log_2 x+\log_x 4<3$

94. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb p, q, że p i q są pierwiastkami równania

$$x^2+px+q=0\,.$$

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2+px+q=(x-p)(x-q)\,.$$

....

Odpowiedź: Są dwie pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=$......, $q=$...... oraz $p=$......, $q=$.......

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2+p^2+q=0$$

oraz

$$q^2+pq+q=0\,.$$

....

Odpowiedź: Są trzy pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=$......, $q=$......; $p=$......, $q=$...... oraz $p=$......, $q=$.......

Dlaczego oba sposoby rozwiązania prowadzą do różnych odpowiedzi?

Powtórka

Uwaga: Poniższe zadania są zadaniami do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium nr 2 (8 grudnia 2011) będzie zakładało umiejętność rozwiązania zadań 1-167 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

95. Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x-4|<1$ oraz $|y-4|<2$. Czy stąd wynika, że
a) $|x-y|<2$
b) $|x+y|>6$
c) $|x+y|<10$
d) $|xy|>10$
e) $|xy|<40$

96. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie
a) o 2000%
b) o 1000%
c) o 400%
d) o 200%
e) o 100%
f) o 20%

97. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena
a) wzrośnie o 20%
b) zmaleje o 20%
c) wzrośnie o 50%
d) zmaleje o 50%
e) wzrośnie o 100%
f) zmaleje o 90%

98. W rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach dodatnich ósmy wyraz jest większy od piątego o 20%. Podać przykład takich m i n, że n-ty wyraz jest od m-tego
a) większy o 100%
b) mniejszy o 10%
c) większy o 10%
d) mniejszy o 1%
e) większy o 1000%
f) mniejszy o 99%

99. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q, że liczba q jest od liczby p

a) większa o 100%

b) większa o 50%

c) większa o 40%

d) większa o 20%

e) większa o 5%

f) mniejsza o 5%

100. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z.

a) $f(x)=x^2,\ \ Z=[-3,-1)$

b) $f(x)=x^2,\ \ Z=(-3,4]$

c) $f(x)=x^2,\ \ Z=[-3,-2]\cup[3,5]$

d) $f(x)=x^2,\ \ Z=(-3,-2]\cup[3,4)$

e) $f(x)=x^2,\ \ Z=(0,3)$

f) $f(x)=x^2-2x+1,\ \ Z=(0,3)$

g) $f(x)=x^2+2x+1,\ \ Z=(0,3)$

h) $f(x)=2^x,\ \ Z=(-3,3)$

i) $f(x)=|2^x-3|,\ \ Z=(-3,3)$

j) $f(x)=|2^x-5|,\ \ Z=(-3,3)$

101. Czy prawdziwa jest równość

a) $\log_2 3=2\cdot\log_4 3$;

b) $\log_2 16=2\cdot\log_3 9$;

c) $\log_4 9=2\cdot\log_4 3$;

d) $\log_2 6=1+\log_2 3$?

102. Czy równość $\left(\sqrt{a}\right)^b=a^{\sqrt{b}}$ jest prawdziwa dla

a) $a=16,\ b=2$;

b) $a=1,\ b=5$;

c) $a=11,\ b=3$;

d) $a=6,\ b=4$?

103. Czy podana liczba jest liczbą całkowitą podzielną przez 10

a) $\dfrac{29!}{26!}$;

b) $\dfrac{36!}{33!}$;

c) $\dfrac{30!}{28!}$;

d) $\dfrac{35!}{31!}$?

104. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\sqrt{3}+\sqrt{8}<5$;

b) $\sqrt{10}+\sqrt{17}<7$;

c) $\sqrt{5}+\sqrt{17}<6$;

d) $\sqrt{8}+\sqrt{15}<7$?

105. Czy podana liczba jest całkowita

a) $2^{\log_4 3}$;

b) $8^{\log_4 25}$;

c) $4^{\log_2 3}$;

d) $2^{\log_8 27}$?

106. Wiadomo, że

$$\binom{14}{4}=1001, \qquad \binom{14}{5}=2002, \qquad \binom{14}{6}=3003\,.$$

Czy prawdą jest, że

a) $\binom{15}{5}=3003$;

b) $\binom{16}{10}=8008$;

c) $\binom{15}{6}=5005$;

d) $\binom{16}{6}=6006$?

107. Liczby całkowite dodatnie m i n są dzielnikami liczby całkowitej dodatniej k. Czy stąd wynika, że liczba k jest podzielna przez

a) mn ;

b) $m+n$;

c) najmniejszą wspólną wielokrotność liczb m i n ;

d) największy wspólny dzielnik liczb m i n ?

108. Czy nierówność $3x<x^2+2$ jest prawdziwa dla

a) $x=\log_3 2$;

b) $x=\log_5 2$;

c) $x=\log_2 3$;

d) $x=\log_2 5$?

109. Czy podana liczba jest całkowita

a) $\frac{15!}{35}$;

b) $\frac{18!}{38}$;

c) $\frac{16!}{36}$;

d) $\frac{17!}{37}$?

110. Czy równanie $x^3+y^4=z^5$ jest spełnione przez liczby

a) $x=2^8$, $y=2^6$, $z=2^5$;

b) $x=2^{24}$, $y=2^{24}$, $z=2^{25}$;

c) $x=2$, $y=2$, $z=2$;

d) $x=2^{12}$, $y=2^9$, $z=2^7$?

111. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\frac{11}{17}<\frac{9}{19}$;

b) $\frac{11}{17}<\frac{11}{19}$;

c) $\frac{11}{17}<\frac{13}{15}$;

d) $\frac{11}{17}<\frac{9}{17}$?

112. Czy równanie $a^2+2ab+b^2=c^2$ jest spełnione przez liczby

a) $a=175$, $b=429$, $c=2006$;

b) $a=449$, $b=409$, $c=-40$;

c) $a=-449$, $b=409$, $c=40$;

d) $a=449$, $b=-409$, $c=40$?

113. Czy nierówność $\sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}$ jest prawdziwa dla

a) $x=9^{37}$, $y=25^{13}$;

b) $x=\log_7 9$, $y=\log_{11} 37$;

c) $x=2006$, $y=8024$;

d) $x=\binom{17}{5}$, $y=\binom{17}{6}$?

114. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $2^{1000}<8^{400}$;

b) $5^{1003}<25^{600}$;

c) $3^{1001}<9^{500}$;

d) $4^{1002}<2^{2006}$?

115. Czy dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi równość

$$\left(x^a\right)^b = x^a \cdot x^b ,$$

jeżeli

a) $a=2$, $b=2$;

b) $a=2$, $b=5/2$;

c) $a=3$, $b=3$;

d) $a=3$, $b=3/2$?

116. Niech $a_n = \frac{n!}{37^n}$. Czy wtedy

a) $a_{10} < a_{20}$;

b) $a_{40} < a_{50}$;

c) $a_{36} < a_{37}$;

d) $a_{37} < a_{38}$?

117. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczby $a+b+c$ oraz $b+c+d$ są nieparzyste. Czy stąd wynika, że

a) liczba $a+d$ jest nieparzysta;

b) liczba $b+c$ jest parzysta;

c) liczba $a+d$ jest parzysta;

d) liczba $b+c$ jest nieparzysta?

118. Liczby rzeczywiste dodatnie x i y spełniają nierówność $|x-y| < 1$. Czy stąd wynika, że

a) $|x^2-y^2| < 1$;

b) $x^2+y^2 < (x+y)^2$;

c) $x+y < 1$;

d) $|x^2-y^2| < x+y$?

119. Czy istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

a) $\frac{n}{n+1} < M$;

b) $\frac{n^2+1}{n+1} < M$;

c) $\frac{n+1}{n} < M$;

d) $\frac{n+1}{n^2+1} < M$?

120. Dowolna liczba całkowita dodatnia jest podzielna przez mn wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednocześnie podzielna przez m i przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $m=12$, $n=15$;

b) $m=15$, $n=22$;

c) $m=13$, $n=18$;

d) $m=14$, $n=21$?

121. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 zachodzi równość

a) $\log_a(bc)=(\log_a b)+\log_a c$;

b) $\log_a(b^c)=(\log_a b)^c$;

c) $\log_a(b+c)=(\log_a b)\cdot\log_a c$;

d) $(\log_a b)\cdot\log_b c=\log_a c$?

122. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\log_2 5<\log_3 5$;

b) $\log_{0,2} 7<\log_3 7$;

c) $\log_{0,2} 7<\log_{0,3} 7$;

d) $\log_2 7<\log_{0,3} 7$?

123. Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

a) $\left(2^{2^n}\right)^2=2^{2^{n+1}}$;

b) $\left(2^{2^n}\right)^8=2^{2^{n+4}}$;

c) $\left(2^{2^n}\right)^4=2^{2^{n+2}}$;

d) $\left(2^{2^n}\right)^6=2^{2^{n+3}}$?

UWAGA: $a^{b^c}=a^{(b^c)}$

124. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki $|x-2|<1$, $|y-3|<1$ oraz $|z-5|<1$ zachodzi nierówność

a) $x+y+z<12$;

b) $xyz>10$;

c) $x+y+z>7$;

d) $xyz<60$?

125. Czy liczba $\log_4(n^2+7)$ jest wymierna dla

a) $n=1$;

b) $n=7$;

c) $n=3$;

d) $n=5$?

126. Czy jest prawdą, że

a) $\log_5 26<\sqrt{22}-3$;

b) $\log_2 26<\sqrt{14}$;

c) $\log_3 26<\sqrt{18}-1$;

d) $\log_2 26<\sqrt{26}$?

127. Czy podana liczba jest wymierna

a) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)^2}$;

b) $\sqrt{\left(5+2\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{10}\right)^2}$;

c) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(6-2\sqrt{7}\right)^2}$;

d) $\sqrt{\left(4+2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{5}\right)^2}$?

128. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $(50!)^{100}<(100!)^{50}$;

b) $5^{222}<3^{333}$;

c) $100!<10^{200}$;

d) $100!<100^{45}$?

129. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b$ oraz $a+b+c$ są wymierne. Czy stąd wynika, ze

a) liczba a jest wymierna;

b) liczba b jest niewymierna;

c) liczba c jest wymierna;

d) liczba $b+c$ jest wymierna?

130. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^3 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^3 jest podzielna przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $m=2^3$, $n=2^4$;

b) $m=2^8$, $n=2^{10}$;

c) $m=2^5$, $n=2^6$;

d) $m=2^7$, $n=2^9$?

131. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

a) $\log_7 1$, $\log_7 3$, $\log_7 5$;

b) $\log_7 25$, $\log_7 10$, $\log_7 4$;

c) $\log_7 1$, $\log_7 4$, $\log_7 16$;

d) $\log_7 4$, $\log_7 6$, $\log_7 9$?

132. Czy istnieje liczba naturalna, której kwadrat

a) ma sumę cyfr równą 12;

b) jest zakończony cyframi ...222;

c) ma sumę cyfr równą 13;

d) ma sumę cyfr równą 14?

133. Czy funkcja f określona wzorem $f(x)=\{x\}$ (część ułamkowa) jest różnowartościowa na przedziale

a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$;

b) $\left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$;

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;

d) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$?

134. Obliczyć (znak [ ] oznacza część całkowitą)

a)
$\left[\sqrt{90}+1\right]=$.........................

b)
$\left[\sqrt{60}+4\right]=$.........................

c)
$\left[\sqrt{80}+2\right]=$.........................

d)
$\left[\sqrt{70}+3\right]=$.........................

135. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a)
$-1 \leqslant x^2 < 25 \Leftrightarrow x \in$.........................

b)
$1 \leqslant x^5 < 32 \Leftrightarrow x \in$.........................

c)
$-1 \leqslant x^3 < 27 \Leftrightarrow x \in$.........................

d)
$1 \leqslant x^4 < 16 \Leftrightarrow x \in$.........................

136. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

a)
$\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

b)
$3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

c)
$2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 =$.........................

d)
$\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24 =$.........................

137. Wskazać taką liczbę naturalną k, że

$$10^k < n < 10^{2k}\,.$$

a)
$n = 3000!$, $k =$.........................

b)
$n = 2^{1200} \cdot (100!)^{10}$, $k =$.........................

c)
$n = 6^{666}$, $k =$.........................

d)
$n = 77^7$, $k =$.........................

138. Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c, że liczby

$$\log_a 37, \quad \log_b 37, \quad \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

a) $a = 64$, $b = 8$, $c =$.........................

b) $a = 64$, $b = 16$, $c =$.........................

c) $a = 4$, $b = 8$, $c =$.........................

d) $a = 2$, $b = 8$, $c =$.........................

139. Czy podana liczba jest kwadratem liczby naturalnej

a) $2^{37}\cdot 12^{73}$;

b) $30^{37}\cdot 60^{73}$;

c) $6^{37}\cdot 24^{73}$;

d) $20^{37}\cdot 45^{73}$?

140. Czy podane liczby tworzą (z zachowaniem kolejności) trójwyrazowy postęp arytmetyczny

a) $5+2\sqrt{6},\ 5,\ \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$;

b) $8+3\sqrt{7},\ 8,\ \dfrac{1}{8+3\sqrt{7}}$;

c) $6+4\sqrt{2},\ 6,\ \dfrac{1}{6+4\sqrt{2}}$;

d) $7+4\sqrt{3},\ 7,\ \dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$?

141. Czy podane liczby tworzą (z zachowaniem kolejności) trójwyrazowy postęp geometryczny

a) $5+2\sqrt{6},\ 1,\ 5-2\sqrt{6}$;

b) $8+3\sqrt{7},\ 1,\ 8-3\sqrt{7}$;

c) $6+4\sqrt{2},\ 1,\ 6-4\sqrt{2}$;

d) $7+4\sqrt{3},\ 1,\ 7-4\sqrt{3}$?

142. Czy podana liczba jest podzielna przez 6^{66}

a) $40000000000000000000000032^{44}$;

b) $70000000000000000000000038^{44}$;

c) $20000000000000000000000004^{44}$;

d) $10000000000000000000000014^{44}$?

143. Dowolna liczba naturalna daje przy dzieleniu przez d taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez d jej końcówka 3-cyfrowa. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $d=12$;

b) $d=40$;

c) $d=16$;

d) $d=25$?

144. Czy istnieją takie liczby naturalne a, b, że liczba NWD(a,b) stanowi $p\%$ liczby NWW(a,b), jeżeli

a) $p=15$;

b) $p=40$;

c) $p=20$;

d) $p=25$?

145. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $2^{29}<3^{21}$;

b) $2^{51}<3^{29}$;

c) $2^{40}<3^{24}$;

d) $2^{42}<3^{28}$?

146. Czy istnieje taka liczba pierwsza p, że liczbą pierwszą jest również liczba

a) p^2+2;

b) p^2+26;

c) p^2+8;

d) p^2+14?

147. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli liczba m^n (m do potęgi n) jest podzielna przez d, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $d=9$;

b) $d=12$;

c) $d=10$;

d) $d=11$?

148. Dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n, jeżeli iloczyn kmn jest podzielny przez d^2, to co najmniej jedna z liczb k, m, n jest podzielna przez d. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $d=8$;

b) $d=11$;

c) $d=9$;

d) $d=10$?

149. Podać największy wspólny dzielnik liczb

a) $\mathrm{NWD}(9!, 9^9) =$.........................

b) $\mathrm{NWD}(12!, 12^{12}) =$.........................

c) $\mathrm{NWD}(10!, 10^{10}) =$.........................

d) $\mathrm{NWD}(11!, 11^{11}) =$.........................

150. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a) $-4 < x^2 < 9$ ....

b) $8 < x^3 < 27$ ....

c) $4 < x^2 < 9$ ....

d) $-8 < x^3 < 27$ ....

151. Podać przykład ciągu arytmetycznego n-wyrazowego o sumie wyrazów równej n, zawierającego wyraz równy 0

a) $n = 3$ ....

b) $n = 6$ ....

c) $n = 4$ ....

d) $n = 5$ ....

152. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

a) $13^{13} - 6^{13}$ ....

b) $37^{37} + 12^{37}$ ....

c) $13^{13} + 6^{13}$ ....

d) $37^{37} - 12^{37}$ ....

153. Dana jest liczba naturalna n. Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n, a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Napisz, czemu jest równa podana liczba (możesz też napisać *nie istnieje*, jeśli uważasz, że podana liczba nie istnieje).

a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D ....

b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W ....

c) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D ....

d) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W ....

154. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $3-2\sqrt{2}<\frac{1}{6}$;

b) $9-4\sqrt{5}<\frac{1}{18}$;

c) $3\sqrt{3}-5<\frac{1}{5}$;

d) $7-5\sqrt{2}<\frac{1}{15}$?

155. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $242^7<121^8$;

b) $266^7<133^8$;

c) $250^7<125^8$;

d) $260^7<130^8$?

156. W dowolnym postępie arytmetycznym 4-wyrazowym a_1,a_2,a_3,a_4 zachodzi równość

$$a_1+Xa_3=Ya_2+a_4\,.$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $X=2,\ \ Y=2$;

b) $X=5,\ \ Y=6$;

c) $X=3,\ \ Y=3$;

d) $X=4,\ \ Y=5$?

157. Czy nierówność $\log_a 3<\log_a 7$ jest prawdziwa dla

a) $a=\left(\sqrt{63}-9\right)^{2010}$;

b) $a=\left(\sqrt{93}-9\right)^{2014}$;

c) $a=\left(\sqrt{73}-9\right)^{2012}$;

d) $a=\left(\sqrt{83}-9\right)^{2013}$?

158. Suma dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego o wszystkich wyrazach będących liczbami naturalnymi jest podzielna przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $n=2011$;

b) $n=2014$;

c) $n=2012$;

d) $n=2013$?

159. Czy liczba $\log_x y$ jest wymierna dla

a) $x=\log_2 3,\ \ y=\log_3 2$;

b) $x=\log_{243} 2187,\ \ y=\log_{2187} 243$;

c) $x=\log_3 5,\ \ y=\log_5 3$;

d) $x=\log_{128} 1024,\ \ y=\log_{1024} 128$?

160. Dla dowolnych liczb naturalnych a,b,c,d, jeżeli iloczyn $abcd$ jest podzielny przez n^3, to co najmniej jedna z liczb a,b,c,d jest podzielna przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $n=2$;

b) $n=16$;

c) $n=4$;

d) $n=8$?

161. Czy równość

$$(\log_a b)^{\log_c d}=d^{\log_c \log_a b}$$

jest prawdziwa dla

a) $a=2,\ \ b=4,\ \ c=8,\ \ d=16$;

b) $a=2,\ \ b=3,\ \ c=5,\ \ d=7$;

c) $a=3,\ \ b=9,\ \ c=5,\ \ d=25$;

d) $a=4,\ \ b=3,\ \ c=8,\ \ d=27$?

162. Niech $A(n)=\sqrt[n]{n}$. Czy liczba $\log_{A(n)} A(k)$ jest całkowita, jeżeli

a) $n=16,\ \ k=4$;

b) $n=64,\ \ k=8$;

c) $n=16,\ \ k=8$;

d) $n=64,\ \ k=4$?

163. Niech

$$\prod_{i=m}^{n} a_i=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdot a_{m+3}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n\,.$$

Czy podana liczba jest wymierna

a) $\prod\limits_{i=2}^{8}\log_i(i+1)$;

b) $\prod\limits_{i=3}^{9}\log_i(i+1)$;

c) $\prod\limits_{i=2}^{9}\log_i(i+1)$;

d) $\prod\limits_{i=3}^{8}\log_i(i+1)$?

164. Przyjmujemy oznaczenia jak w zadaniu poprzednim. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

a) $\prod_{i=2}^{7} \log_i(i+2) =$.........................

b) $\prod_{i=3}^{8} \log_i(i+2) =$.........................

c) $\prod_{i=2}^{8} \log_i(i+2) =$.........................

d) $\prod_{i=3}^{7} \log_i(i+2) =$.........................

165. Dla podanej liczby a podać taką liczbę b (w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego), aby spełniona była równość

$$\log_7 a + \log_7 b = \log_7 (a+b)\,.$$

a) $a = 5/2$, $b =$.........................

b) $a = 8/3$, $b =$.........................

c) $a = 3$, $b =$.........................

d) $a = 7/2$, $b =$.........................

166. Niech

$$A(n) = 3^{3^{3^n}}$$

$$B(n) = \log_3 A(n)$$

$$C(n) = \log_{A(n)} A(n+1)$$

$$D(n) = \log_{C(n)} B(n)\,.$$

Zapisać podane liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry:** $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $D(9) =$.........................

b) $D(243) =$.........................

c) $D(27) =$.........................

d) $D(81) =$.........................

167. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y. Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

a) $\{x\} = \{3x\}$, $x =$ ....

b) $\{2x\} = \{13x\}$, $x =$ ....

c) $\{x\} = \{4x\}$, $x =$ ....

d) $\{2x\} = \{7x\}$, $x =$ ....