168. Uporządkować podane liczby w kolejności niemalejącej.
$\sin 50°$, $\cos 80°$, $\sin 170°$, $\cos 200°$, $\sin 250°$, $\cos 280°$.

169. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej wzorem
a) $f(x)=\sin 2x$
b) $f(x)=\cos 3x$
c) $f(x)=\sin(x/2)$
d) $f(x)=\sin^2 x$
e) $f(x)=\cos^2 x$
f) $f(x)=(1+\cos 2x)/2$
g) $f(x)=(1-\cos 2x)/2$
h) $f(x)=3+5\cos x$
i) $f(x)=\sin \pi x$

170. Która liczba jest większa?
a) $\sin 1°$ czy $\sin 1$
b) $\sin 2°$ czy $\sin 2$
c) $\sin 3°$ czy $\sin 3$
d) $\sin 4°$ czy $\sin 4$
e) $\sin 5°$ czy $\sin 5$
f) $\sin 6°$ czy $\sin 6$

171. Uprościć wyrażenie, w którym n przebiega liczby naturalne.
a) $\sin n\pi$
b) $\sin n^2\pi$
c) $\cos n\pi$
d) $\cos n^3\pi$
e) $\cos(n^2+n)\pi$
f) $\sin((2n+1)\pi/2)$
g) $\sin((2n-1)\pi/2)$
Dopuszczalne odpowiedzi: 1, 0, $(-1)^n$, $(-1)^{n+1}$.

172. Dla każdej z liczb $n=1,2,3,\ldots,23$ rozstrzygnąć, czy liczby $\sin n$ oraz $\cos n$ są dodatnie.

173. Rozwiązać równania i nierówności.
a) $\sin x \geqslant 1/2$
b) $\cos x \leqslant 1/2$
c) $\sin x \geqslant \cos x$
d) $\left[4\sin^2 x\right]=2$
e) $\{\cos^2 x\}=3/4$
f) $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\cdot\cos(x/2)$
g) $\sin^2 x+\cos^4 x=\cos^2 x+\sin^4 x$

174. Jaką najmniejszą i największą wartość przyjmuje wyrażenie

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x \text{ ?}$$

175. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta?

a) $f(x)=0$
b) $f(x)=37$
c) $f(x)=2x$
d) $f(x)=2x^2+1$
e) $f(x)=14x^5+6x^3$
f) $f(x)=x^6+x^5$
g) $f(x)=\sin^{37}x\cdot\cos^{24}x$
h) $f(x)=\sin^{24}x\cdot\cos^{37}x$
i) $f(x)=x^{111}\cdot\sin^{24}x\cdot\cos^{37}x$
j) $f(x)=x^{111}\cdot\sin^{37}x\cdot\cos^{24}x$
k) $f(x)=x^{666}\cdot\sin^{24}x\cdot\cos^{37}x$
l) $f(x)=x^{666}\cdot\sin^{37}x\cdot\cos^{24}x$
m) $f(x)=\sin x^{37}$
n) $f(x)=\sin x^{24}$
o) $f(x)=\cos x^{37}$
p) $f(x)=\cos x^{24}$
q) $f(x)=(x^2+1)\sin x$
r) $f(x)=(x^2+1)\cos x$
s) $f(x)=(x^3+1)\sin x$
t) $f(x)=(x^3+1)\cos x$

176. Dla każdej z liczb $i\in\{1,2,\ldots,13\}$ wskazać taką liczbę $j\in\{1,2,\ldots,13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x))=x\,.$$

$f_1(x)=37+x$
$f_2(x)=37-x$
$f_3(x)=x-37$
$f_4(x)=3x-2$
$f_5(x)=3x-4$
$f_6(x)=3x-6$
$f_7(x)=\frac{x}{3}+2$
$f_8(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$
$f_9(x)=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$
$f_{10}(x)=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}|x|$
$f_{11}(x)=-\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}|x|$

$f_{12}(x)=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}|x|$

$f_{13}(x)=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}|x|$

177. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x)=f(x), \qquad f(6-x)=f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

178. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

179. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB=\sphericalangle ACB+60^\circ .$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB.

180. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

181. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30°, a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB.

182. W trapezie o wysokości 9 ramiona mają długości 15 i 41, a jedna z podstaw ma długość 60. Jaka jest długość drugiej podstawy?

183. Wyznaczyć wszystkie trójkąty prostokątne o bokach długości całkowitej, w których jedna z przyprostokątnych ma długość

a) 7

b) 9

c) 12

184. Niech $0<a\leqslant b\leqslant c$. Dokończyć i uzasadnić:

a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...

b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...

e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...

185. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

186. W trójkącie o bokach podanej długości wskazać kąt, którego miara wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą.

a) 3, 4, 5

b) 3, 5, 7
c) 3, 7, 8

187. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.
a) w czworokąt można wpisać okrąg
b) na czworokącie można opisać okrąg
c) czworokąt jest równoległobokiem
d) czworokąt jest rombem
e) czworokąt jest prostokątem
f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
g) sumy długości przeciwległych boków są równe
h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
k) przekątne są prostopadłe
l) przekątne dzielą się na połowy

188. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla
a) $p=12$, $r=1$, $S=6$
b) $p=16$, $r=2$, $S=18$
c) $p=20$, $r=3$, $S=30$
d) $p=24$, $r=4$, $S=50$
e) $p=28$, $r=5$, $S=70$

189. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

190. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
a) 1, 3, 10, 15
b) 2, 4, 10, 15
c) 3, 27, 10, 15
d) 4, 30, 10, 15

191. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

192. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

193. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

194. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b+d<a+c+e\,.$$

195. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a+c+e=b+d+f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)[1] na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)[1].

196. Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

197. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3...A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.
a) A_1A_7, A_3A_9
b) A_1A_5, A_2A_8
c) A_1A_5, A_3A_7
d) A_1A_6, A_4A_9

198. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3...A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających
a) $A_1A_2A_4A_9$
b) $A_1A_3A_7A_{11}$
c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
d) $A_1A_6A_9A_{10}$
e) $A_1A_4A_6A_{11}$
f) $A_1A_2A_3A_9$
g) $A_1A_6A_8A_{11}$
h) $A_1A_3A_4A_8$
Które czworokąty mają równe pola?

199. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe
a) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
b) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
c) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
d) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

200. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C, że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB\ ?$$

[1]niepotrzebne skreślić

Powtórka

Uwaga: Poniższe zadania są zadaniami do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwia nr 3 (12 stycznia 2012) i 4 (19 stycznia 2012) będą zakładać umiejętność rozwiązania zadań 1-263 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

201. Udowodnić podaną nierówność dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej $n>1$.

a) $n^{1000}<2^n$

b) $1000^n<n!$

c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>1000$

d) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}>1000n$

202. Niech

$$f(x)=\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|.$$

Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

a) $f_1(x)=f(2x)$

b) $f_2(x)=f(x/2)$

c) $f_3(x)=2f(x)$

d) $f_4(x)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)$

e) $f_5(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$

f) $f_6(x)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$

g) $f_7(x)=\frac{1}{2}-f(x)$

h) $f_8(x)=f\left(\left|x-\frac{1}{4}\right|\right)$

i) $f_9(x)=\left|f\left(x-\frac{1}{4}\right)\right|$

j) $f_{10}(x)=\frac{f(2x)}{2}$

k) $f_{11}(x)=f(x)+x$

l) $f_{12}(x)=5f(x)+3x$

203. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

a) $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$

b) $f(x)=\frac{x}{x-1}$

c) $f(x)=2+\frac{1}{x+3}$

d) $f(x)=1-\frac{1}{x}$

e) $f(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$

f) $f(x)=1-\dfrac{1}{x-2}$

g) $f(x)=1-\dfrac{1}{|x|-2}$

h) $f(x)=1-\dfrac{1}{|x-2|}$

i) $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{x-2}\right|$

j) $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{|x|-2}\right|$

k) $f(x)=\left|1-\dfrac{1}{|x-2|}\right|$

204. Dziewięciokąt $A_1A_2A_3\ldots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta

a) $A_1A_3A_7$ **b)** $A_2A_3A_8$ **c)** $A_3A_4A_5$

205. Czy liczba $(x^x)^x$ jest wymierna dla

a) $x=\sqrt{2}$;

b) $x=\sqrt{6}$;

c) $x=\sqrt{3}$;

d) $x=\sqrt{5}$?

206. Czy nierówność $12x<x^2+32$ jest prawdziwa dla podanej liczby x (pierwiastek jest w wykładniku)

a) $x=2^{\sqrt{3}}$;

b) $x=2^{\sqrt{11}}$;

c) $x=2^{\sqrt{5}}$;

d) $x=2^{\sqrt{7}}$?

207. Liczby rzeczywiste x,y spełniają nierówność $|x-y|<1$. Czy stąd wynika, że

a) $|2x+2y|<10$;

b) $|2x-2y|<10$;

c) $|3x-2y|<10$;

d) $|x+y|<10$?

208. Deltoidem nazywamy dowolny czworokąt wypukły, w którym przekątne są prostopadłe, a jedna z nich dzieli drugą na połowy (ale druga pierwszej już nie musi). Czy stąd wynika, że

a) w dowolny deltoid można wpisać okrąg;

b) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa sąsiednie boki równej długości;

c) na dowolnym deltoidzie można opisać okrąg;

d) w dowolnym deltoidzie istnieją dwa przeciwległe boki równej długości?

209. Czy nierówność

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^m < \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

jest prawdziwa dla

a) $m=2007$, $n=2008$;

b) $m=2008$, $n=2010$;

c) $m=2007$, $n=2009$;

d) $m=2008$, $n=2009$?

210. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x. Czy stąd wynika, że

a) funkcja f jest parzysta;

b) funkcja f jest różnowartościowa;

c) funkcja f jest nieparzysta;

d) funkcja f jest okresowa?

211. Czy istnieje taka liczba naturalna n, że liczba n^5

a) jest podzielna przez 2^4, ale nie jest podzielna przez 2^6;

b) jest podzielna przez 8^7, ale nie jest podzielna przez 8^8;

c) jest podzielna przez 2^6, ale nie jest podzielna przez 2^9;

d) jest podzielna przez 4^7, ale nie jest podzielna przez 4^8?

212. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x^2+y^2<1$. Czy stąd wynika, że

a) $x+y>0$;

b) $x+y<2$;

c) $x+y<1$;

d) $x+y>2$?

213. Czy liczba $\log_n(n-24)$ jest wymierna dla

a) $n=25$;

b) $n=49$;

c) $n=27$;

d) $n=32$?

214. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^2 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^2 jest podzielna przez n. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $m=4$, $n=8$;

b) $m=9$, $n=27$;

c) $m=3$, $n=9$;

d) $m=8$, $n=16$?

215. Czy równość $\cos\alpha=\sin(4\alpha)$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha=18°$;

b) $\alpha=45°$;

c) $\alpha=24°$;

d) $\alpha=30°$?

216. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k jest podzielna przez $(n+1)!$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k jest podzielna przez $n!$ i przez $n+1$. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $n=10$;

b) $n=16$;

c) $n=11$;

d) $n=14$?

217. Czy podana liczba jest podzielna przez 2^{100}

a) $1234567890987654321160^{35}$;

b) $1234567890987654321036^{55}$;

c) $1234567890987654321222^{65}$;

d) $1234567890987654321100^{45}$?

218. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\sqrt{10}-3<1/6$;

b) $\sqrt{37}-6<1/11$;

c) $\sqrt{17}-4<1/6$;

d) $\sqrt{26}-5<1/11$?

219. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $11111^2+22222^2<4\cdot 11111^2$;

b) $11111^5+22222^5<27\cdot 11111^5$;

c) $11111^3+22222^3<9\cdot 11111^3$;

d) $11111^4+22222^4<25\cdot 11111^4$?

220. Czy nierówność $\log_a 2 < \log_a 3$ jest prawdziwa dla

a) $a = \log_2 3$;

b) $a = \sqrt{3} - 1$;

c) $a = \log_3 2$;

d) $a = \sqrt{5} - 1$?

221. Czy równość $2^m \cdot 4^n = 8^{m+n}$ jest prawdziwa dla

a) $m = 1$, $n = 2$;

b) $m = 4$, $n = -2$;

c) $m = 2$, $n = -4$;

d) $m = 3$, $n = 3$?

222. Obliczyć wartości podanych wyrażeń. $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

a) $\left[\log_2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{64}\right)\right]=$.........................

b) $\left[\log_3\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)\right]=$.........................

c) $\left[\log_2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{128}\right)\right]=$.........................

d) $\left[\log_2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)\right]=$.........................

223. Podać wartość logarytmu $\log_a b$ w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeżeli $b = \sqrt{2}$ oraz

a) $a = \sqrt[4]{4}$, $\log_a b =$.........................

b) $a = \sqrt[32]{32}$, $\log_a b =$.........................

c) $a = \sqrt[8]{8}$, $\log_a b =$.........................

d) $a = \sqrt[16]{16}$, $\log_a b =$.........................

224. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k, że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym

a) $i = 1$, $j = 2$, $k =$.........................

b) $i = 1$, $j = 7$, $k =$.........................

c) $i = 1$, $j = 5$, $k =$.........................

d) $i = 1$, $j = 6$, $k =$.........................

225. Podać zbiór rozwiązań nierówności w liczbach rzeczywistych $x\in[0,\pi]$

a) $\sin x<1/2$ ....

b) $\cos x<\sin 2x$ ....

c) $\sin x<\cos x$ ....

d) $\sin x<\sin 2x$ ....

226. Podać przykład takich liczb naturalnych m, n, że

$$\mathrm{NWD}(m,n)<m<n<\mathrm{NWW}(m,n)\,,$$

a ponadto

a) $\mathrm{NWD}(m,n)=1$, $\mathrm{NWW}(m,n)=15$, $m=$........................ $n=$........................

b) $\mathrm{NWD}(m,n)=1$, $\mathrm{NWW}(m,n)=30$, $m=$........................ $n=$........................

c) $\mathrm{NWD}(m,n)=2$, $\mathrm{NWW}(m,n)=24$, $m=$........................ $n=$........................

d) $\mathrm{NWD}(m,n)=3$, $\mathrm{NWW}(m,n)=36$, $m=$........................ $n=$........................

227. Podać miarę β kąta wewnętrznego n-kąta wypukłego, jeżeli wiadomo, że każdy z pozostałych $n-1$ kątów ma miarę α.

a) $n=3$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=$........................

b) $n=6$, $\alpha=140^\circ$, $\beta=$........................

c) $n=4$, $\alpha=100^\circ$, $\beta=$........................

d) $n=5$, $\alpha=100^\circ$, $\beta=$........................

228. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a) $x^2<x$..

b) $x^3<64x^2$..

c) $x^3<x$..

d) $x^4<16x^2$..

229. W dowolnym n-kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków. Powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $k=2$ oraz $n=$........................

b) $k=10$ oraz $n=$........................

c) $k=3$ oraz $n=$........................

d) $k=5$ oraz $n=$........................

230. Czy w czworokąt wypukły o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) można wpisać okrąg

a) 11, 5, 2, 10;

b) 11, 4, 5, 10;

c) 11, 2, 2, 11;

d) 11, 5, 4, 10?

231. Czy w czworokącie wypukłym o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) przekątne są prostopadłe

a) 11, 5, 2, 10;

b) 11, 4, 5, 10;

c) 11, 2, 2, 11;

d) 11, 5, 4, 10?

232. Czy równość $|\sin\alpha|=|\sin4\alpha|$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha=30^\circ$;

b) $\alpha=60^\circ$;

c) $\alpha=36^\circ$;

d) $\alpha=45^\circ$?

233. Czy równość $|\cos\alpha|=|\cos4\alpha|$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha=30^\circ$;

b) $\alpha=60^\circ$;

c) $\alpha=36^\circ$;

d) $\alpha=45^\circ$?

234. Czy istnieje taki trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku O, że

a) $\measuredangle ABC=70^\circ,\quad \measuredangle AOC=140^\circ$;

b) $\measuredangle ABC=110^\circ,\quad \measuredangle AOC=140^\circ$;

c) $\measuredangle ABC=80^\circ,\quad \measuredangle AOC=160^\circ$;

d) $\measuredangle ABC=100^\circ,\quad \measuredangle AOC=150^\circ$?

235. Dany jest 12-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{11}A_{12}$. Czy podany sześciokąt jest równokątny

a) $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$;

b) $A_1A_4A_5A_8A_9A_{12}$;

c) $A_1A_2A_5A_6A_9A_{10}$;

d) $A_1A_4A_5A_6A_9A_{12}$?

236. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\log_{0,2}0,4<2$;

b) $\log_{0,9}0,3<2$;

c) $\log_{0,3}0,9<2$;

d) $\log_{0,4}0,2<2$?

237. Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\cos 10^\circ<\log_2 3$;

b) $\cos 160^\circ<\log_3 10$;

c) $\cos 60^\circ<\log_{10} 3$;

d) $\cos 110^\circ<\log_3 2$?

238. Czy nierówność

$$\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n}}<16^{16^n}$$

jest prawdziwa dla

a) $n=1$;

b) $n=4$;

c) $n=2$;

d) $n=3$?

239. Czy nierówność

$$n^{2^{16}}<16^n$$

jest prawdziwa dla

a) $n=2^{16}$;

b) $n=2^{19}$;

c) $n=2^{17}$;

d) $n=2^{18}$?

240. Czy istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 66, podzielna przez

a) 5 ;

b) 12 ;

c) 8 ;

d) 9 ?

241. Czy istnieje liczba naturalna o dwucyfrowej końcówce 66, podzielna przez

a) 4 ;

b) 18 ;

c) 5 ;

d) 9 ?

242. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, których największy wspólny dzielnik NWD(m,n) jest mniejszy od liczby n o

a) 25% ;

b) 80% ;

c) 40% ;

d) 75% ?

243. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, których najmniejsza wspólna wielokrotność NWW(m,n) jest większa od liczby n o

a) 250% ;

b) 800% ;

c) 400% ;

d) 750% ?

244. Czy podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej

a) $24^{10}\cdot 9^{11}$;

b) $24^{13}\cdot 9^{22}$;

c) $24^{11}\cdot 9^{12}$;

d) $24^{12}\cdot 9^{21}$?

245. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $x^6=y^6$, zachodzi równość

a) $x^3=y^3$;

b) $x^{14}=y^{14}$;

c) $x^4=y^4$;

d) $x^5=y^5$?

246. Niech $a=\log_x y$ oraz $b=\log_y x$. Czy nierówność

$$\log_a b<\log_b a$$

jest prawdziwa, jeżeli

a) $x=2^{16}$, $y=2^{32}$;

b) $x=7^{343}$, $y=7^{49}$;

c) $x=3^{27}$, $y=3^{81}$;

d) $x=5^{625}$, $y=5^{125}$?

247. Czy wśród wierzchołków n-kąta foremnego istnieje k wierzchołków będących wierzchołkami k-kąta foremnego, jeżeli

a) $n=2013$, $k=3$;

b) $n=2016$, $k=6$;

c) $n=2014$, $k=4$;

d) $n=2015$, $k=5$?

248. Czy wysokości trójkąta przecinają się wewnątrz trójkąta, którego pewne dwa kąty mają miary

a) 11° i 33° ;

b) 77° i 99° ;

c) 33° i 55° ;

d) 55° i 77° ?

249. Czy symetralne boków trójkąta przecinają się wewnątrz trójkąta, którego pewne dwa kąty mają miary

a) 11° i 33° ;

b) 77° i 99° ;

c) 33° i 55° ;

d) 55° i 77° ?

250. Czy równość $\cos(2\alpha)=\sin(7\alpha)$ jest prawdziwa dla

a) $\alpha=6^\circ$;

b) $\alpha=18^\circ$;

c) $\alpha=10^\circ$;

d) $\alpha=15^\circ$?

251. Czy miara kąta wewnętrznego n-kąta formenego wyrażona w stopniach jest liczbą całkowitą, jeżeli

a) $n=40$;

b) $n=60$;

c) $n=45$;

d) $n=54$?

252. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geqslant k$, że

$$\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$$

a) $k=2$, $n=$.........................

b) $k=5$, $n=$.........................

c) $k=3$, $n=$.........................

d) $k=4$, $n=$.........................

253. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to największy wspólny dzielnik liczb m, n stanowi $q\%$ liczby n. Dla podanej liczby p podać liczbę q.

a) $p=10$, $q=$.........................

b) $p=40$, $q=$.........................

c) $p=20$, $q=$.........................

d) $p=30$, $q=$.........................

254. Jeżeli liczba m jest większa od liczby n o $p\%$, to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n jest większa o $q\%$ od liczby n. Dla podanej liczby p podać liczbę q.

a) $p=10$, $q=$.........................

b) $p=40$, $q=$.........................

c) $p=20$, $q=$.........................

d) $p=30$, $q=$.........................

255. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego 15-wyrazowego $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ jest równa $5(a_m+a_n+a_k)$. Dla podanych m, n wskazać taką liczbę naturalną k, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $m=1$, $n=10$, $k=$.........................

b) $m=7$, $n=10$, $k=$.........................

c) $m=3$, $n=9$, $k=$.........................

d) $m=6$, $n=8$, $k=$.........................

256. Niech $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f_1(x)=|x-3|$. Funkcje f_n dla $n\geqslant 2$ określamy rekurencyjnie wzorem

$$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))\ .$$

Podać wartość

a) $f_{1000}(1001)=$........................

b) $f_{1000}(4004)=$........................

c) $f_{1000}(2002)=$........................

d) $f_{1000}(3003)=$........................

257. Podać wszystkie takie pary liczb naturalnych $b<c$, że trójkąt o bokach $20,b,c$ jest prostokątny.

$b=$........................, $c=$........................ $b=$........................, $c=$........................

$b=$........................, $c=$........................ $b=$........................, $c=$........................

$b=$........................, $c=$........................

258. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a) $-1/4<\log_{16}x<1/8$ ....

b) $-1<\log_{16}x<1/4$ ....

c) $-1/2<\log_{16}x<3/2$ ....

d) $-3/2<\log_{16}x<1/2$ ....

259. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a) $-1<\log_x 4<1$ ....

b) $-4<\log_x 4<4$ ....

c) $-1/2<\log_x 4<1/2$ ....

d) $-2<\log_x 4<2$ ....

260. W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ o sumie wyrazów równej S zachodzi równość $a_k=w$. Dla podanych n oraz S wskazać takie k oraz w, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $n=3,\ \ S=21,\ \ k=$........................, $w=$........................

b) $n=21,\ \ S=63,\ \ k=$........................, $w=$........................

c) $n=7,\ \ S=21,\ \ k=$........................, $w=$........................

d) $n=9,\ \ S=63,\ \ k=$........................, $w=$........................

261. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{15}$. Dla podanych x, y, z, s wskazać takie t, że pięciokąt wypukły o wierzchołkach
A_x, A_y, A_z, A_s, A_t (niekoniecznie leżących na obwodzie pięciokąta w tej kolejności) ma pole równe polu pięciokąta $A_1A_3A_6A_{10}A_{15}$.

a) $x=1$, $y=4$, $z=5$, $s=7$, $t=$ ....

b) $x=1$, $y=6$, $z=11$, $s=13$, $t=$ ....

c) $x=1$, $y=4$, $z=8$, $s=11$, $t=$ ....

d) $x=1$, $y=6$, $z=11$, $s=12$, $t=$ ....

262. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $[y]$ oraz $\{y\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby y. Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego.

a) $[x]=3\{x\}$, $x=$.........................

b) $[x]=6\{x\}$, $x=$.........................

c) $[x]=4\{x\}$, $x=$.........................

d) $[x]=5\{x\}$, $x=$.........................

263. Podać wszystkie takie pary liczb naturalnych $b<c$, że trójkąt o bokach $15,b,c$ jest prostokątny.

$b=$........................, $c=$........................ $b=$........................, $c=$........................

$b=$........................, $c=$........................ $b=$........................, $c=$........................

$b=$........................, $c=$........................