

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za każde podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Zmienne m, n przebiegają zbiór liczb naturalnych $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

1.1. $A = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^2 \leq m^2 \leq 27n^2 \right\}$	Ocena
--	-------------

$$\inf A = 5$$

$$\sup A = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru A **NIE**

1.2. $B = \left\{ \frac{m}{n} : 25n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\}$	Ocena
--	-------------

$$\inf B = \sqrt[3]{25}$$

$$\sup B = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **NIE**

Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

1.3. $C = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 8^m \leq 4^n \right\}$	Ocena
--	-------------

$$\inf C = \log_8 3$$

$$\sup C = 2/3$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE**

Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

1.4. $D = \left\{ \frac{m}{n} : 3^n \leq 9^m \leq 4^n \right\}$	Ocena
--	-------------

$$\inf D = 1/2$$

$$\sup D = \log_9 4 = \log_3 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru D **NIE**

1.5. $E = \left\{ \frac{1}{10n-37} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
--	-------------

$$\inf E = -1/7$$

$$\sup E = 1/3$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK**

Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **2.**

Przy każdym z poniższych 14 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **Prawdą** (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **Fałszem** (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **Nie** wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 9)$ punktów**.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$,
- implikacja $T(102) \Rightarrow T(100)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(77)$ **P**

b) $T(777)$ **P**

c) $T(66)$ **F**

d) $T(666)$ **P**

e) $T(44) \Rightarrow T(444)$ **P**

f) $T(55) \Rightarrow T(555)$ **P**

g) $T(22) \Rightarrow T(20)$ **P**

h) $T(222) \Rightarrow T(200)$ **P**

i) $T(99) \Rightarrow T(91)$ **P**

j) $T(999) \Rightarrow T(991)$ **P**

k) $T(87) \Rightarrow T(88)$ **F**

l) $T(88) \Rightarrow T(89)$ **P**

m) $T(887) \Rightarrow T(888)$ **P**

n) $T(888) \Rightarrow T(889)$ **P**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **3.**

W każdym z siedmiu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-2)$ punktów**.

$$3.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = e^3$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x+2}} = 1$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^2+2}} = e^{\sqrt{3}}$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^3+2}} = +\infty$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^x = 1$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^2} = \sqrt[3]{e}$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right)^{x^3} = +\infty$$

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **4.**

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 1)$ punktów.**

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x\}^2 + c \cdot \{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=-1$, $c=0$

b) $a=-2$, $b=2$, $c=0$

c) $a=\text{NIE}$, $b=\text{NIE}$, $c=3$

d) $a=2$, $b=-2$, $c=0$

e) $a=-3$, $b=3$, $c=0$

f) $a=\text{NIE}$, $b=\text{NIE}$, $c=5$

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 5.

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}} \right|} = \frac{|x|^{5n}}{\sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot 5^{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \cdot \left(\frac{|x|^5}{5} \right)^n = b_n$$

i zauważamy, że wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ zachodzi zbieżność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = 1.$$

Jeżeli $\frac{|x|^5}{5} < 1$, czyli

$$|x| < \sqrt[5]{5},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1$, skąd wynika, że dany w zadaniu szereg potęgowy jest zbieżny.Jeżeli zaś $\frac{|x|^5}{5} > 1$, czyli

$$|x| > \sqrt[5]{5},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $\sqrt[5]{5}$ i pozostaje zbadać jego zachowanie na końcach przedziału zbieżności.Dla $x = \sqrt[5]{5}$ szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

i jest rozbieżny jako szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, gdzie $p \leq 1$.Natomiast dla $x = -\sqrt[5]{5}$ szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

i w oczywisty sposób spełnia założenia kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, jest więc zbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział

$$\left[-\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{5} \right).$$

Punktacja: **3 punkty** za wyznaczenie promienia zbieżności, po **1 punkcie** za rozstrzygnięcie zbieżności na każdym z końców przedziału zbieżności.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 6.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \sum_{n=1}^{\infty} c^3 (q^3)^{n-1} = \frac{c^3}{1-q^3},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = \frac{7}{2} \\ \frac{c^3}{1-q^3} = \frac{7}{2} \end{cases}, \quad (\spadesuit)$$

czyli

$$\begin{cases} 2c = 7(1-q) \\ 2c^3 = 7(1-q^3) \end{cases}.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c = \frac{7(1-q)}{2},$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje kolejno

$$2 \frac{7^3(1-q)^3}{2^3} = 7(1-q^3)$$

$$\frac{7^2(1-q)^3}{4} = 1-q^3$$

$$7^2(1-q)^3 = 4(1-q)(1+q+q^2)$$

$$7^2(1-q)^2 = 4(1+q+q^2)$$

$$49q^2 - 98q + 49 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$45q^2 - 102q + 45 = 0 \quad (\heartsuit)$$

$$15q^2 - 34q + 15 = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma rozwiązania

$$q = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 15 \cdot 15}}{30} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 15^2}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{(17-15)(17+15)}}{15} = \\ = \frac{17 \pm \sqrt{2 \cdot 32}}{15} = \frac{17 \pm \sqrt{64}}{15} = \frac{17 \pm 8}{15},$$

co wobec warunku $q < 1$ wymaga przyjęcia „ $\pm$ ” = „ $-$ ”. Ostatecznie otrzymujemy

$$q = \frac{17-8}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

skąd

$$c = \frac{7(1-q)}{2} = \frac{7}{5}.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 3/5$, $c = 7/5$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{7 \cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

Punktacja częściowych rozwiązań wykorzystujących zaprezentowaną wyżej metodę konstrukcji przykładu:

Za uzyskanie układu równań ($\spadesuit$) - **2 punkty**.

Za uzyskanie równania ($\heartsuit$) - **razem 3 punkty**.

Za poprawne wyliczenie $q = 3/5$ - **razem 4 punkty**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 7.

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \leq \sum_{k=1}^{2n^6} \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} \leq 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 0}} = 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900 + 32n^{-870}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{900 + 0}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p+6} + 16n^{24}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p-444} + 16n^{-426}}{30} \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 0}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p = 444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

*Punktacja:*Poprawne określenie liczby składników - **1 punkt**Poprawne oszacowanie od góry i dołu przy założonej liczbie składników - **1 punkt**

Poprawne wyznaczenie $p = 444$ lub innej wartości wynikającej z przyjętej wcześniej liczby składników - **1 punkt**

Poprawne przejścia graniczne w wyrażeniach szacujących sumę, powołanie się na twierdzenie o trzech ciągach oraz uzyskanie granicy $1/15$ - **1 punkt**

Poprawne zrealizowanie wszystkich powyższych elementów rozwiązania - **1 punkt**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 8.Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^4 + 1}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^4 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^4 + 1} - \sqrt[8]{y^4 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 1) - (y^4 + 1)}{\left(\sqrt[8]{x^4 + 1} + \sqrt[8]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4 + 1} + \sqrt[8]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4 + 1} + \sqrt[8]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} < 1. \quad (2)$$

Podobnie, równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1},$$

co daje

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0+1} + \sqrt[8]{0+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4+1} + \sqrt[8]{y^4+1}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}} \cdot \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}} \leq \\ & \leq |x-y| \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x-y|}{2}. \end{aligned}$$

Punktacja:

Doprowadzenie przekształceń do (1) - **2 punkty**

Otrzymanie nierówności (2) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (3) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (4) i dokończenie rozwiązania - **1 punkt**