

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za każde podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Oznaczenie: Zbiór liczb naturalnych większych od 1: $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

1.1. $A = \left\{ 2^{\log_n 3} - 3^{\log_n 2} : n \in \mathbb{N}_2 \right\}$	Ocena
---	-------------

infA=0	supA=0
--------	--------

Czy kres dolny należy do zbioru A TAK	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
--	--

1.2. $B = \left\{ \frac{2^{\log_n 3}}{3^{\log_n 2}} : n \in \mathbb{N}_2 \right\}$	Ocena
---	-------------

infB=1	supB=1
--------	--------

Czy kres dolny należy do zbioru B TAK	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
--	--

1.3. $C = \left\{ 2^{2^{x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$	Ocena
---	-------------

infC=2	supC=+∞
--------	---------

Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C NIE
--	--

1.4. $D = \left\{ 2^{2^{-x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$	Ocena
--	-------------

infD=1	supD=2
--------	--------

Czy kres dolny należy do zbioru D NIE	Czy kres górny należy do zbioru D TAK
--	--

1.5. $E = \left\{ 2^{2^{x^3}} : x \in \mathbb{R} \right\}$	Ocena
---	-------------

infE=1	supE=+∞
--------	---------

Czy kres dolny należy do zbioru E NIE	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
--	--

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **2.**

W każdym z poniższych 6 pytań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 2)$ punktów.

Piąty punkt za udzielenie sześciu poprawnych odpowiedzi.

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 10, a pierwszy wyraz jest równy 3. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \mathbf{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_n) = \mathbf{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = \mathbf{30}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \mathbf{-3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \mathbf{-9}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) = \mathbf{-7}$

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 3.

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Pięty punkt za udzielenie szesnastu poprawnych odpowiedzi.

3.1. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$ **NIE**
- b) $k = 12$ **NIE**
- c) $k = 16$ **NIE**
- d) $k = 20$ **TAK**

3.2. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$ **NIE**
- b) $k = 12$ **TAK**
- c) $k = 16$ **TAK**
- d) $k = 20$ **TAK**

3.3. Czy nierówność $|z+1| < |z-4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$ **NIE**
- b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$ **TAK**
- c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$ **NIE**
- d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$ **TAK**

3.4. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$ **TAK**
- b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$ **TAK**
- c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$ **NIE**
- d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$ **TAK**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 4.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-1)$ punktów**.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x+1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = -3, \quad d = -3$

b) $a = -5, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 3$

c) $a = \text{NIE}, \quad b = \text{NIE}, \quad c = 3, \quad d = 4$

d) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = -5, \quad d = -5$

e) $a = -9, \quad b = 3, \quad c = 6, \quad d = 6$

f) $a = \text{dowolne}, \quad b = -6-a, \quad c = 6, \quad d = 6$

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 5.

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Udowodnimy zbieżność szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu trzeba wykazać spełnianie trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 9900} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{9900}{n^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

W tym celu trzeba udowodnić nierówność

$$\frac{n}{n^2 + 9900} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2 + 9900}.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy kolejno:

$$n \cdot (n^2 + 2n + 9901) \geq (n+1) \cdot (n^2 + 9900),$$

$$n^3 + 2n^2 + 9901n \geq n^3 + n^2 + 9900n + 9900,$$

$$n^2 + n \geq 9900,$$

$$n \cdot (n+1) \geq 99 \cdot 100.$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności jest stała, a lewa rośnie wraz z n , a ponadto dla $n = 99$ zachodzi równość, widzimy, że nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 99$.

Oznacza to, że dany w zadaniu szereg nie spełnia założeń kryterium Leibniza, ale spełnia je szereg $\sum_{n=99}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$, który wobec tego jest zbieżny. Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

Punktacja:

Rozwiązania wykazujące brak świadomości, że należy oprzeć rozwiązanie na kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych i sprawdzić monotoniczność ciągu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu - **0 punktów**.

Sformułowanie warunków kryterium Leibniza, stwierdzenie, że warunek 1° jest spełniony oraz sprawdzenie warunku 2° - **1 punkt**.

Udowodnienie, że ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący od wyrazu 99-go (lub od jakiegokolwiek dalszego - przy wyborze innej metody dowodu) - **kolejne 2 punkty**.

Końcowe uzasadnienie, że dany w zadaniu szereg jest zbieżny (z powołaniem się na niezależność zbieżności od zmiany lub pominięcia skończenia wielu wyrazów) - **kolejne 2 punkty**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 6.

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Gdyby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ miał wszystkie wyrazy nieujemne, zachodziłaby równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

co przeczy warunkom zadania. Stąd wynika, że wyraz a_1 jest ujemny jako jedyny, którego dodatniość nie jest wymuszona założeniami podanymi w treści zadania.

Niech $S = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + S$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -a_1 + S,$$

skąd

$$\begin{cases} a_1 + S = 1 \\ -a_1 + S = 13, \end{cases}$$

co prowadzi do $a_1 = -6$ oraz $S = 7$.

To pozwala opisać wszystkie szeregi spełniające warunki zadania: pierwszy wyraz musi być równy -6 , a pozostałe wyrazy muszą być dodatnie i mieć sumę 7. Jednak polecenie zadania wymaga podania przykładu, więc w rozwiązaniu musimy wskazać jakiś konkretny szereg.

Wychodząc od równości

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{14}{2^n} = 7,$$

co pozwala przyjąć $a_1 = -6$ oraz $a_n = \frac{14}{2^n}$ dla $n \geq 2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gdzie

$$a_1 = -6 \quad \text{oraz} \quad a_n = \frac{14}{2^n} \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Punktacja:

Rozwiązania wykazujące brak świadomości, że $a_1 < 0$ jest jedynym wyrazem ujemnym, a w szczególności poszukiwanie przykładu szeregu czysto geometrycznego - **0 punktów**.

Za poprawne wywnioskowanie, że $a_1 = -6$ - **2 punkty**.

Za poprawne podanie opisu wszystkich szeregów spełniających warunki zadania, bez podania konkretnego przykładu - **maksymalnie 4 punkty za całe rozwiązanie**.

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 7.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^n \cdot \binom{2n}{n} > 3 \cdot 7^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $2^n \cdot \binom{2n}{n} = 2^1 \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4$ oraz $3 \cdot 7^{n-1} = 3 \cdot 7^0 = 3 \cdot 1 = 3$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 3$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^n \cdot \binom{2n}{n} > 3 \cdot 7^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$2^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 3 \cdot 7^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{2^{n+1} \cdot (2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{2^{n+1} \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1)} = \\ &= 2^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} = 2^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} > \\ &> 3 \cdot 7^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq 3 \cdot 7^{n-1} \cdot 7 = 3 \cdot 7^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq 7.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$4 \cdot (2n+1) \geq 7(n+1),$$

$$8n+4 \geq 7n+7,$$

$$n \geq 3.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$2^2 \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 6 = 24 > 21 = 3 \cdot 7^1.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$2^3 \cdot \binom{6}{3} = 8 \cdot 20 = 160 > 150 = 3 \cdot 50 > 3 \cdot 49 = 3 \cdot 7^2.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwagi i punktacja:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq 7$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} > 7, \quad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, to 2 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 4$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności $(\spadesuit)$), że została udowodniona implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.

Punktacja szczegółowa:

Doprowadzenie rachunków do nierówności $\frac{4 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq 7$ - **1 punkt**

Rozwiązanie tej nierówności - **0.5 punktu**

Wykonanie sprawdzenia dowodzonej nierówności dla $n = 1, 2$ (także dla $n = 3$ w przypadku użycia ostrej nierówności $(\spadesuit)$) - **0.5 punktu**

Wykonanie sprawdzenia dowodzonej nierówności dla $n = 3$ (odpowiednio dla $n = 4$ w przypadku użycia ostrej nierówności $(\spadesuit)$) - **0.5 punktu oraz podwojenie całej punktacji**

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 13.02.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie 8.Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^2 + 10^8}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^2 + 10^8} - \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^8) - (y^2 + 10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8} \right)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}} < 1. \quad (2)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0 + 10^8} + \sqrt[8]{0 + 10^8}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}. \quad (3)$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8} + \sqrt[4]{0+10^8}} = \frac{1}{100+100} = \frac{1}{200} . \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+10^8} + \sqrt{y^2+10^8}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8} + \sqrt{y^2+10^8}} \leq \\ & \leq |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{4000} . \end{aligned}$$

Punktacja za poszczególne elementy rozwiązania:

Doprowadzenie przekształceń do (1) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (2) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (3) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (4) - **1 punkt**

Dokończenie rozwiązania - **1 punkt**