

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za każde podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

1.1. $A = \{2^{\log_n 3} - 3^{\log_n 2} : n \in \mathbb{N}_2\}$ Ocena

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{1.2.} \ B = \left\{ \frac{2^{\log_n 3}}{3^{\log_n 2}} : n \in \mathbb{N}_2 \right\} \quad \text{Ocena}$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

1.3. $C = \left\{ 2^{2^{x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$ Ocena

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

1.4. $D = \left\{ 2^{2^{-x^2}} : x \in \mathbb{R} \right\}$ Ocena

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

1.5. $E = \left\{ 2^{2^{x^3}} : x \in \mathbb{R} \right\}$ Ocena

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie **2.**

W każdym z poniższych 6 pytań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 2)$ **punktów**.

Piąty punkt za udzielenie sześciu poprawnych odpowiedzi.

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 10, a pierwszy wyraz jest równy 3. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_n) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \dots\dots\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \dots\dots\dots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}) = \dots\dots\dots$

Zadanie **3.**

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi TAK/NIE.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Piąty punkt za udzielenie szesnastu poprawnych odpowiedzi.

3.1. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$
- b) $k = 12$
- c) $k = 16$
- d) $k = 20$

3.2. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^p$ jest zbieżny dla $p = 3 - \log_2 k$, gdzie

- a) $k = 8$
- b) $k = 12$
- c) $k = 16$
- d) $k = 20$

3.3. Czy nierówność $|z + 1| < |z - 4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \log_2 3 + i \cdot \log_3 7$
- b) $z = \log_3 5 + i \cdot \log_4 9$
- c) $z = \log_4 8 + i \cdot \log_5 12$
- d) $z = \log_5 11 + i \cdot \log_6 14$

3.4. Czy równość $\bar{z}^2 = z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

- a) $z = \sqrt{\log_6 2} + i \cdot \sqrt{\log_6 3}$
- b) $z = \sqrt{\log_{12} 3} + i \cdot \sqrt{\log_{12} 4}$
- c) $z = \sqrt{\log_{18} 4} + i \cdot \sqrt{\log_{18} 5}$
- d) $z = \sqrt{\log_{30} 5} + i \cdot \sqrt{\log_{30} 6}$

Zadanie **4.**

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 1)$ punktów.**

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{2x + 1\} + c \cdot \{x\} + d \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1, \quad b = 2, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots$

b) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = \dots\dots\dots$

c) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 3, \quad d = 4$

d) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = \dots\dots\dots, \quad d = \dots\dots\dots$

e) $a = \dots\dots\dots, \quad b = 3, \quad c = 6, \quad d = \dots\dots\dots$

f) $a = \dots\dots\dots, \quad b = \dots\dots\dots, \quad c = 6, \quad d = 6$

Zadanie **5.**

Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 9900}$$

jest zbieżny.

Zadanie **6.**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **7.**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^n \cdot \binom{2n}{n} > 3 \cdot 7^{n-1}.$$

Zadanie **8.**

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$