

19	20	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 10, 18.12.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **19.** (9 punktów)

Za każdą poprawnie podaną parę parametrów otrzymasz 1 punkt. Parametry muszą spełniać warunek $a < b$.

19.1 Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < a \\ x^3 & \text{dla } a \leq x < b \\ x & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = -1, \quad b = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$a = 0, \quad b = 1$$

19.2 Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b) , dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{dla } x < a \\ |x^2 - 10x + 15| & \text{dla } a \leq x < b \\ 6 & \text{dla } b \leq x \end{cases}$$

jest ciągła.

$$a = 1, \quad b = 3$$

$$a = 1, \quad b = 7$$

$$a = 1, \quad b = 9$$

$$a = 3, \quad b = 7$$

$$a = 3, \quad b = 9$$

$$a = 7, \quad b = 9$$

Zadanie 20. (5 punktów)

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = c \cdot q^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{n-1} = \frac{c/2}{1-q/2} = \frac{c}{2-q} \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{3} \cdot \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{c/3}{1-q/3} = \frac{c}{3-q},$$

co w połączeniu z warunkami podanymi w treści zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 20 \\ \frac{c}{2-q} = 8 \\ \frac{c}{3-q} = 5 \end{cases}$$

Po przemnożeniu równań przez mianowniki występujące po lewej stronie otrzymujemy

$$\begin{cases} c = 20 - 20q \\ c = 16 - 8q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Odjęcie stronami od pierwszych dwóch równań trzeciego równania daje

$$\begin{cases} 0 = 5 - 15q \\ 0 = 1 - 3q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie $q = 1/3$, $c = 40/3$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{3^n}.$$