

25	26	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 13, 22.01.2013, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **25.** (8 punktów)

W każdym z zadań **25.1.-25.7.** udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Ósmy punkt otrzymasz za bezbłędne rozwiązanie wszystkich siedmiu zadań.

Zadania dotyczą liczb zespolonych.

25.1. Czy nierówność $|z-1| < |z-5|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1+i$ TAK b) $z = 2+2i$ TAK c) $z = 3+3i$ NIE d) $z = 4+4i$ NIE

25.2. Czy nierówność $|z| < |z-4i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1+i$ TAK b) $z = 2+2i$ NIE c) $z = 3+3i$ NIE d) $z = 4+4i$ NIE

25.3. Czy nierówność $|z-5-5i| < |z+1+i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1+i$ NIE b) $z = 2+2i$ NIE c) $z = 3+3i$ TAK d) $z = 4+4i$ TAK

25.4. Czy nierówność $|z-7| < |z-7i|$ jest prawdziwa dla

- a) $z = 1+i$ NIE b) $z = 2+2i$ NIE c) $z = 3+3i$ NIE d) $z = 4+4i$ NIE

25.5. Czy liczba $(\sqrt{3}+i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ NIE b) $n = 2013$ NIE c) $n = 2014$ NIE d) $n = 2016$ TAK

25.6. Czy liczba $(1-\sqrt{3}\cdot i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ NIE b) $n = 2013$ TAK c) $n = 2014$ NIE d) $n = 2016$ TAK

25.7. Czy liczba $(-1+i)^n$ jest rzeczywista dla

- a) $n = 2012$ TAK b) $n = 2013$ NIE c) $n = 2014$ NIE d) $n = 2016$ TAK

Zadanie 26. (8 punktów)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 16}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 16}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 16}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 16} - \sqrt[4]{y^2 + 16} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 16) - (y^2 + 16)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 16} + \sqrt[4]{0 + 16}} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 16} + \sqrt[4]{y^2 + 16}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 16}} \leq |x - y| \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{|x - y|}{4}. \end{aligned}$$