

1	2	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 1, 9.10.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 4^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n=1$ mamy $(n+3) \cdot \binom{2n}{n} = 4 \cdot 2 = 8$ oraz $4^n = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8 > 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 4^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 4^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+4)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+4)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+4)(2n+1)(2n+2)}{(n+3)(n+1)^2} = (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > \\ &> 4^n \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+4)(2n+1) \geq 4(n+3)(n+1),$$

$$(n+4)(2n+1) \geq 2(n+3)(n+1),$$

$$2n^2 + 9n + 4 \geq 2n^2 + 8n + 6,$$

$$n \geq 2.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$. Sprawdzenie dla $n = 2$ okazuje się bowiem przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$5 \cdot \binom{4}{2} = 30 > 16 = 4^2.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4,$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 3$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 2$, to 2 punkty. To samo, gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ♠), że została udowodniona implikacja $T(2) \Rightarrow T(3)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.

Zadanie 2. (5 punktów)

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

2.1 Czy równość $3 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

- a) $n = 17, k = 3$ NIE
- b) $n = 19, k = 4$ TAK
- c) $n = 24, k = 5$ NIE
- d) $n = 27, k = 6$ TAK

2.2 Czy nierówność $\binom{2012}{k} < \binom{2012}{k+1000}$ jest prawdziwa dla

- a) $k = 505$ TAK
- b) $k = 506$ NIE
- c) $k = 507$ NIE
- d) $k = 508$ NIE

2.3 Czy prawdziwa jest równość

- a) $\sum_{i=-9}^{10} 7 = 140$ TAK
- b) $\sum_{i=-9}^{10} i^7 = 10^7$ TAK
- c) $\sum_{i=-9}^{10} 8 = 80$ NIE
- d) $\sum_{i=-9}^{10} i^8 = 10^8$ NIE

2.4 Czy prawdziwa jest równość

- a) $\prod_{n=1}^{117} (n+1) = 118!$ TAK
- b) $\prod_{n=2}^{119} n = 118!$ NIE
- c) $\prod_{n=5}^{120} n = 119!$ NIE
- d) $\prod_{n=6}^{120} n = 119!$ TAK