

3	4	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 2, 16.10.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 3. (5 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{90} 300$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{90} 300$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{90} 300 = \frac{m}{n}$$

$$90^{m/n} = 300$$

$$90^m = 300^n.$$

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^{2m} \cdot 5^m = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 5^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m &= 2n \\ 2m &= n \\ m &= 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązań w liczbach dodatnich m, n , gdyż wówczas mielibyśmy

$$m = 2n > n = 2m > m.$$

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{90} 300$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{90} 300$ jest niewymierna.

Zadanie 4. (5 punktów)

W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi otrzymasz **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach otrzymasz **5 punktów**.

4.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(9)$ NIE
- b) $T(10)$ NIE
- c) $T(11)$ NIE
- d) $T(111)$ TAK

4.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że fałszywe jest

- a) $T(9)$ NIE
- b) $T(10)$ NIE
- c) $T(11)$ NIE
- d) $T(111)$ NIE

4.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że fałszywe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że fałszywe jest

- a) $T(9)$ NIE
- b) $T(10)$ TAK
- c) $T(11)$ TAK
- d) $T(111)$ NIE

4.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(4) \Rightarrow T(44)$ NIE
- b) $T(4) \Rightarrow T(444)$ TAK
- c) $T(44) \Rightarrow T(88)$ TAK
- d) $T(4444) \Rightarrow T(444)$ TAK