

7	8	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 4, 30.10.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 7. (5 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2 + 1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left| \sqrt{n^2 + 1} - n - \frac{C}{n} \right| = \left| \sqrt{n^2 + 1} - \left(n + \frac{C}{n} \right) \right| = \left| \frac{n^2 + 1 - \left(n + \frac{C}{n} \right)^2}{\sqrt{n^2 + 1} + \left(n + \frac{C}{n} \right)} \right| = \left| \frac{1 - 2C - \frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2 + 1} + \left(n + \frac{C}{n} \right)} \right|.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz $2C$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy C tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli $C = 1/2$. Przy tej wartości C wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2 + 1} + \left(n + \frac{1}{2n} \right)} = \frac{1}{4n^2 \left(\sqrt{n^2 + 1} + n + \frac{1}{2n} \right)} < \frac{1}{4n^2 \left(\sqrt{n^2 + 0} + n + 0 \right)} = \frac{1/8}{n^3},$$

co kończy rozwiązanie zadania z $D = 1/8$.

Uwagi:

Stała C jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $C \neq 1/2$ jest błędne.

Stała $D = 1/8$ jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z $D < 1/8$ jest błędne.

Zadanie **8.** (5 punktów)

Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 5)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+10)$,
- implikacja $T(66) \Rightarrow T(77)$ jest fałszywa.

Wówczas:

a) $T(37)$ **F**

b) $T(51)$ **P**

c) $T(72)$ **N**

d) $T(86)$ **P**

e) $T(97)$ **N**

f) $T(10) \Rightarrow T(100)$ **P**

g) $T(10) \Rightarrow T(101)$ **P**

h) $T(10) \Rightarrow T(106)$ **P**

i) $T(16) \Rightarrow T(108)$ **N**

j) $T(17) \Rightarrow T(109)$ **P**