

9	10	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 5, 6.11.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 9. (6 punktów)

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-3)$ punktów**.

$$9.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 5n + 9}}{n^4 + 5n^3 + 3} = 0$$

$$9.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8n^8 + 5n + 16}}{n^4 + 5n^3 + 3} = 2\sqrt{2}$$

$$9.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^9 + 5n + 25}}{n^4 + 5n^3 + 3} = +\infty$$

$$9.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3 \cdot (-2)^n) = \mathbf{R}$$

$$9.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^n \right) = \mathbf{R}$$

$$9.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) = 0$$

$$9.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 4n^2} - n^2 \right) = 2$$

$$9.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 9n^2} - n^2 \right) = \frac{9}{2}$$

$$9.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 16n^2} - n^2 \right) = 8$$

Zadanie **10.** (7 punktów)

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+4} + \dots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Maksymalna punktacja zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C :

- Przy $D/C > 2$ możesz otrzymać **3 punkty**.
- Przy $3/2 \leq D/C \leq 2$ możesz otrzymać **5 punktów**.
- Przy $D/C < 3/2$ możesz otrzymać **7 punktów**.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $12n^2$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$24n^3 = 12n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 12n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 48n^3,$$

co kończy rozwiązanie za **5 punktów**.

Uzyskaliśmy tu liczby $k = 3$, $C = 24$, $D = 48$ i iloraz $D/C = 2$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} = \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} + \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i},$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$10n^3 = 5n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} \leq 5n^2 \cdot \sqrt{9n^2} = 15n^3$$

oraz

$$21n^3 = 7n^2 \cdot \sqrt{9n^2} \leq \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 7n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 28n^3,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3 \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 43n^3.$$

To kończy rozwiązanie za **7 punktów**.

Uzyskane liczby to $k = 3$, $C = 31$, $D = 43$, a zatem $D/C = 43/31 < 45/30 = 3/2$.