

11	12	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **6**, 20.11.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **11**. (6 punktów)

W każdym z zadań **11.1-11.6** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

$$11.1. A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ocena

$$\inf A = -1$$

$$\sup A = 1/4$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$11.2. B = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ocena

$$\inf B = -2$$

$$\sup B = 5/4$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$11.3. C = \left\{ (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ocena

$$\inf C = -1$$

$$\sup C = 1$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

$$11.4. D = \left\{ (-1)^m - \frac{(-1)^n}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ocena

$$\inf D = -5/4$$

$$\sup D = 2$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$11.5. E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 8n^2 \right\}$$

Ocena

$$\inf E = 0$$

$$\sup E = 2\sqrt{2}$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

$$11.6. F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m^2 \leq 9n^2 \right\}$$

Ocena

$$\inf F = 0$$

$$\sup F = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru F **NIE** Czy kres górny należy do zbioru F **TAK**

Zadanie 12. (5 punktów)

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $n^3 - n^2 + 1$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leqslant (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^3}}{n^7 + n^4} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^5}}}{1 + \frac{1}{n^3}} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geqslant (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^2}}{n^7 + n^6} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^6}}}{1 + \frac{1}{n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

a ponadto dla $p = 8$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Odpowiedź: Dla $p = 8$ wartość granicy jest równa 1.