

13	14	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **7**, **27.11.2012**, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **13.** (7 punktów)

W każdym z zadań **13.1-13.7** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź, nie otrzymasz punktów.

13.1. $A = \{\sqrt{x^2 - 4x + 4} : x \in (-3, 5)\}$

Ocena

$\inf A = 0$

$\sup A = 5$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **NIE**

13.2. $B = \{\sqrt{x^2 - 4x + 4} : x \in (1, 4)\}$

Ocena

$\inf B = 0$

$\sup B = 2$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **NIE**

13.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 6n + 10} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf C = 0$

$\sup C = 1$

Czy kres dolny należy do zbioru C **NIE** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

13.4. $D = \left\{ \frac{1}{n^2 - 6n + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf D = -1$

$\sup D = 1/2$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

13.5. $E = \left\{ \frac{1}{n^2 - 6n + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Ocena

$\inf E = -1$

$\sup E = 1/4$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

13.6. $F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^n \leq 8^m \leq 12^n \right\}$

Ocena

$\inf F = 2/3$

$\sup F = \log_8 12$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **NIE**

13.7. $G = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^m \leq 8^n \leq 12^m \right\}$

Ocena

$\inf G = \log_{12} 8$

$\sup G = 3/2$

Czy kres dolny należy do zbioru G **NIE** Czy kres górny należy do zbioru G **TAK**

Zadanie **14.** (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k , że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $k=11$ i zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{11}+1}}{n^7+1} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{11}+3n^{11}}}{n^7+0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{12}+1}}{n^7+1} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{12}+0}}{n^7+n^7} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dla $k=11$ pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.