

15	16	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 8, 4.12.2012, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15. (5 punktów)**

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-4)$ punktów.**

$$15.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \quad 1$$

$$15.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \quad \frac{1}{2}$$

$$15.3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \quad 0$$

$$15.4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \quad \frac{1}{2}$$

$$15.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \frac{1}{3^k} = \quad \frac{1}{18}$$

$$15.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \quad 0$$

$$15.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^6 + 2n^2} - n^3 \right) = \quad 0$$

$$15.8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^6 + 3n^3} - n^3 \right) = \quad \frac{3}{2}$$

$$15.9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^6 + 4n^4} - n^3 \right) = \quad +\infty$$

Zadanie 16. (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 0}{1 - 0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{n^3 - n} \geq \frac{(3n-1) \cdot (3n+2)}{(n+1)^3 - (n+1)},$$

czyli po zastosowaniu tożsamości

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$$

dla $x = n$ oraz $x = n+1$

$$\frac{(3n-4) \cdot (3n-1)}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \geq \frac{(3n-1) \cdot (3n+2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{3n-4}{n-1} \geq \frac{3n+2}{n+2}$$

$$(3n-4) \cdot (n+2) \geq (3n+2) \cdot (n-1)$$

$$3n^2 + 6n - 4n - 8 \geq 3n^2 - 3n + 2n - 2$$

$$3n^2 + 2n - 8 \geq 3n^2 - n - 2$$

$$3n \geq 6$$

$$n \geq 2.$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 2$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.