

35. O zdaniu¹ $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 6$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(10)$,
- b) prawdziwe jest $T(11)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(7) \Rightarrow T(13)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(3) \Rightarrow T(1)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(1) \Rightarrow T(3)$.

36. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(100)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-1)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(50) \Rightarrow T(30)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(300) \Rightarrow T(200)$,
- e) prawdziwa jest implikacja $T(30) \Rightarrow T(50)$,
- f) prawdziwa jest implikacja $T(200) \Rightarrow T(300)$.

37. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe jest $T(1)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) prawdziwe jest $T(9)$,
- b) prawdziwe jest $T(10)$,
- c) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(25)$,
- d) prawdziwa jest implikacja $T(100) \Rightarrow T(200)$.

38. O zdaniu $T(n)$ udowodniono, że prawdziwe są $T(1)$ i $T(6)$, oraz że dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+3)$. Czy można stąd wnioskować, że

- a) fałszywe jest $T(3)$,
- b) fałszywe jest $T(11)$,
- c) prawdziwe jest $T(9)$,
- d) dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwe jest $T(n^2)$.

39. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(5)$ jest fałszywe
- b) $T(10)$ jest prawdziwe
- c) $T(15)$ jest fałszywe
- d) $T(20)$ jest prawdziwe

40. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(25)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 20$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ oraz dla każdej liczby naturalnej $4 \leq n \leq 30$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-3)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

- a) $T(37)$
- b) $T(38)$
- c) $T(10)$
- d) $T(11)$

41. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

- a) $T(27) \Rightarrow T(39)$
- b) $T(99) \Rightarrow T(100)$
- c) $T(63) \Rightarrow T(71)$
- d) $T(29) \Rightarrow T(57)$

¹Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstraszaające.

Liczby rzeczywiste, liczby wymierne i niewymierne.

Wykład: zad. 42-46

Konwersatorium 15.10.2012: zad. 35-41

Ćwiczenia 15.10.2012: zad. 52-64

Kolokwium nr 2, 16.10.2012: materiał z zad. 1-64

42. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat jest równy 2.**43.** Czy liczba $0,(9) = 0,999999\dots$ jest wymierna czy niewymierna?**44.** Niech

$$x = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 3 \cdot 243 + \dots = \\ &= 1 + 3 \cdot (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \dots) = 1 + 3x, \end{aligned}$$

skąd $x = -1/2$.

Jak to możliwe, że suma liczb całkowitych dodatnich jest ujemna i niecałkowita?

Przykład **45.** Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

$$2^{m/n} = 3$$

$$2^m = 3^n.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

46. Dla liczby wymiernej dodatniej $q = m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, zapisać warunek $\log_2 3 < q$. Wykorzystać ten warunek do porównania $\log_2 3$ z liczbami $3/2$, $5/3$ oraz $8/5$.

Zadania 47-51 to proste zadanka rachunkowe. Na ćwiczeniach prawdopodobnie wystarczy tylko porównać wyniki.

47. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci ułamka zwykłego.**48.** Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

49. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$

50. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$

51. $(0,(037))^{0,(3)}$

52. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

53. Dowieść, że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.
 54. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.
 55. Dowieść, że liczba $\sqrt{\log_4 25}$ jest niewymierna.
 56. Dowieść, że liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.
 57. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.
 58. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

OSZUSTWO 59.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2} \\ w + \sqrt{2} &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} \\ w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 &= 3 - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

60. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{\quad}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

61. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

62. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

63. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?

64. Liczby $a + b$, $b + c$, $c + d$ i $d + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

Nierówności.

Ćwiczenia 22,29.10.2012: zad. 88-116 Kol. nr 3, 23.10.2012: materiał z zad. 1-70, 88-101
 Konwersatorium 22,29.10.2012: zad. 117-121 Kol. nr 4, 30.10.2012: materiał z zad. 1-139

Przykłady z wykładów (65-87)

65. Oszacować liczbę $1000!$ od góry i dołu przez potęgi dziesiątki.

66. Oszacować od góry i dołu wyrażenie

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{9n}.$$

67. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots$ zachodzi nierówność

$$n^2 \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstawić liczbę, dla której udaje się łatwo zredagować dowód.

68. To samo dla nierówności

$$n^4 \leq 2^n.$$

69. To samo dla nierówności

$$n^8 \leq 2^n.$$

Zastanówić się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

70. Wskazać liczbę naturalną $n > 1$ spełniającą nierówność

$$n^{1000} < 2^n.$$

Przykład **71.** Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \leq \frac{4n^4 + 3n^3 - 0}{5n^4 - 4n^2 + 0} = \frac{7n^4}{n^4} = 7.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 + 3n^3 - 2}{5n^4 - 4n^2 + 2} \geq \frac{4n^4 + 0 - 2n^4}{5n^4 - 0 + 2n^4} = \frac{2n^4}{7n^4} = \frac{2}{7}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 2/7$ oraz $D = 7$.

Przykład **72.** Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Szacując dane wyrażenie od góry otrzymujemy

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq \frac{4n^4 - 0 + 2n^4}{5n^4 + 0 - 2n^4} = \frac{6n^4}{3n^4} = 2.$$

Z kolei szacowanie od dołu prowadzi do

$$\frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \geq \frac{4n^4 - 3n^4 + 0}{5n^4 + 4n^4 - 0} = \frac{n^4}{9n^4} = \frac{1}{9}.$$

Zatem dane w zadaniu nierówności są spełnione ze stałymi $C = 1/9$ oraz $D = 2$.

Oszacować podane wyrażenia od góry i od dołu ($n \in \mathbb{N}$) przez wyrażenia różniące się stałym czynnikiem dodatnim (o ile nie podano inaczej)

73. $\frac{n^4 + 2n^3 + n + 7}{4n^4 + n^2 + 15}$ 74. $\frac{n\sqrt{n+4}+5}{\sqrt{n^3+4}+1}$ 75. $\frac{2^n + 10n^2}{2^n + n^4}$
76. $\frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+3} + \dots + \sqrt{2n^2}}{2n+5}$ 77. $\frac{n!}{n! + 10^n}$
78. $\frac{n^6 + 5n + 4}{2n^3 - n^2 + 7}$ 79. $\frac{\sqrt{n^7+9}+6}{\sqrt[3]{n^4+15}+8}$ 80. $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{64n}}{\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \sqrt[3]{n+3} + \dots + \sqrt[3]{64n}}$
81. $\frac{x}{x^2+1}$ (tylko od góry, $x \in \mathbb{R}$) 82. $\frac{6x^7 - 5x^5 + 7}{5x^7 - 2x^4 + 3}$ ($x \in (0, +\infty)$)
83. $\frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$) 84. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$
85. $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$)
86. $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ (szacowanie postaci $g \pm C/n$)

87. Oszacować $\sqrt[n]{n}$.

88. Która z liczb jest większa

- a) $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$?
- b) 26^{99} czy 10^{151} ?
- c) 26^{99} czy 123^{65} ?
- d) $\prod_{i=2}^{2009} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\sqrt[j]{j} - \sqrt[i]{i} \right)$ czy $10^{-1000000}$?

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się od góry, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

89. Uprościć wyrażenie

$$\left(3^{2^n} - 2^{2^m}\right) \cdot \prod_{i=0}^{37} \left(3^{2^{n+i}} + 2^{2^{m+i}}\right),$$

gdzie

$$\prod_{i=j}^k a_i = a_j \cdot a_{j+1} \cdot a_{j+2} \dots a_k.$$

90. Niech $a = \sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

[illegible]

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

91. Niech $a = \sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa

a^{256} czy 256^a ?

92. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a = (5 - \sqrt{37})^{2008}$$

$$b = (6 - \sqrt{37})^{2009}$$

$$c = (7 - \sqrt{73})^{2011}$$

$$d = (9 - \sqrt{73})^{2013}$$

93. Która z liczb jest większa $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

94. Która z liczb jest większa $\sqrt[10]{10}$ czy 1,25 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200.

95. Która z liczb jest większa $\sqrt[45]{45}$ czy 1,08 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 200 oraz wolno wykorzystać równości $3^{19} = 1\,162\,261\,467$ i $5^{13} = 1\,220\,703\,125$.

96. Która z liczb jest większa 45^{13} czy 2^{72} ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania oraz wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 300.

97. Wskazać taką liczbę naturalną n , że

$$n^{1000000} + 1 < 2^n.$$

98. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq \dots\dots\dots$ zachodzi nierówność

$$n^{32} \leq 2^n.$$

W miejsce kropek wstaw dowolną liczbę, dla której umiesz przeprowadzić dowód.

Następnie zastanów się nad modyfikacją dowodu tak, aby zmniejszyć liczbę wpisaną w miejsce kropek.

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą k udowodnić nierówności $10^k < L < 10^{2k}$.

99. $L = 3972^{257}$ **100.** $L = 257^{3972}$ **101.** $L = 700!$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $C < W(n) < D$.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{102.} \ W(n) = \frac{n^4 + 16n + 3}{2n^4 + 7n^2} & \mathbf{103.} \ W(n) = \frac{13n^2 - 10n + 3}{2n^2 + 7n - 1} & \mathbf{104.} \ W(n) = \frac{\sqrt{n+7} + 3}{\sqrt{n+3} + 7} \\ \mathbf{105.} \ W(n) = \frac{7^n + 6^n + 2^n}{7^n + 5^n + 3^n} & \mathbf{106.} \ W(n) = \sqrt{n^2 + n} - n & \mathbf{107.} \ W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n \end{array}$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{108.} \ W(n) = \frac{n^7 + 10n^3 + 3}{n^4 + 37} & \mathbf{109.} \ W(n) = \frac{5n^8 - n^4 + 3}{5n^{10} - 4} & \mathbf{110.} \ W(n) = \frac{n^6 + 2n^4 + 1}{\sqrt{n} + 2} \\ \mathbf{111.} \ W(n) = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n^6 + 2} + 2} & \mathbf{112.} \ W(n) = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 1} + 1} & \mathbf{113.} \ W(n) = \frac{\sqrt[5]{n^2 + 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 1} + 1} \end{array}$$

Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$1 - \frac{C}{n} < W(n) < 1 + \frac{C}{n}.$$

$$\mathbf{114.} \ W(n) = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 7n + 2} \quad \mathbf{115.} \ W(n) = \frac{3n^2 - 2n + 3}{3n^2 + 7n - 2} \quad \mathbf{116.} \ W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n + 1}$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, g udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < W(n) < g + \frac{C}{n}.$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{117.} \ W(n) = \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 7n + 2} & \mathbf{118.} \ W(n) = \frac{4n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 7n - 2} & \mathbf{119.} \ W(n) = \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{3n + 1} \\ \mathbf{120.} \ W(n) = \sqrt{n^2 + n} - n & \mathbf{121.} \ W(n) = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n & \end{array}$$

Zadania do samodzielnej powtórki.

Jeśli uda się wygospodarować trochę czasu, wątpliwości związane z tymi zadaniami mogą być wyjaśnione na konwersatorium lub ćwiczeniach.

Zawsze można też skorzystać z konsultacji.

122. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+16} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} \leq 2C.$$

123. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n+40} - \sqrt{9n+16}}{\sqrt{4n+45} - \sqrt{4n+5}} \leq 5C.$$

124. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

125. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

126. Niech

$G(1) = 1$, $G(2) = 6$, $G(3) = 5$, oraz $G(n+3) = 3 \cdot G(n+1) + 2 \cdot G(n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Dowieść, że wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$G(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n.$$

127. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

128. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$8n \leq 2^n + 16.$$

129. Udowodnić nierówność

$$n^{2^{27}} \leq 2^n$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n > 1$. (Należy wybrać jedną liczbę n spełniającą nierówność i dla tej liczby udowodnić nierówność.)

Przypomnienie: Potęgowanie wykonujemy **od góry**, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

130. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt. Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

130.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(2008)$ jest prawdziwe

b) $T(2009)$ jest prawdziwe

c) $T(2013)$ jest fałszywe

d) $T(2014)$ jest fałszywe

130.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+4)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

a) $T(80) \Rightarrow T(92)$

b) $T(81) \Rightarrow T(93)$

c) $T(96) \Rightarrow T(76)$

d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

130.3 Czy prawdziwa jest nierówność

a) $\binom{999}{111} < \binom{999}{444}$

b) $\binom{999}{222} < \binom{999}{555}$

c) $\binom{999}{333} < \binom{999}{666}$

d) $\binom{999}{444} < \binom{999}{777}$

130.4 Czy prawdziwa jest równość

a) $\sum_{i=1}^3 i = 6$

b) $\sum_{i=1}^3 2 = 6$

c) $\prod_{i=1}^3 i = 6$

d) $\prod_{i=1}^3 2 = 6$

131. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt. Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

131.1 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że

- a) $T(85)$ jest prawdziwe
- b) $T(93)$ jest prawdziwe
- c) $T(106)$ jest prawdziwe
- d) $T(120)$ jest prawdziwe

131.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(100)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n > 5$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-5)$. Czy stąd wynika, że prawdziwa jest implikacja

- a) $T(80) \Rightarrow T(95)$
- b) $T(130) \Rightarrow T(300)$
- c) $T(166) \Rightarrow T(111)$
- d) $T(97) \Rightarrow T(77)$

131.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a) $T(5)$ jest prawdziwe
- b) $T(6)$ jest prawdziwe
- c) $T(7)$ jest fałszywe
- d) $T(8)$ jest fałszywe

131.4 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

- a) $T(7)$ jest prawdziwe
- b) $T(8)$ jest prawdziwe
- c) $T(9)$ jest fałszywe
- d) $T(10)$ jest fałszywe

132. Przy każdym z poniższych zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. Nie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Podaj tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia. Za podanie n poprawnych odpowiedzi przyznaj sobie $\max(0, n - 5)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że $T(1)$ jest prawdziwe, $T(100)$ jest fałszywe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n + 10)$. Wówczas:

a) $T(70)$

b) $T(81)$

c) $T(92)$

d) $T(101)$

e) $T(140)$

f) $T(75) \Rightarrow T(105)$

g) $T(161) \Rightarrow T(160)$

h) $T(51) \Rightarrow T(60)$

i) $T(10) \Rightarrow T(11)$

j) $T(10) \Rightarrow T(12)$

133. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna q spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

134. Chcemy zlokalizować położenie względem liczb wymiernych, liczby rzeczywistej $q > 1$ spełniającej równanie z poprzedniego zadania. Dla dowolnej liczby wymiernej postaci m/n , gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, zapisać warunki $m/n < q$ oraz $m/n > q$ używając tylko liczb m , n , działań na liczbach całkowitych, znaków nierówności i ewentualnie symboli logicznych.

Wykorzystać te warunki do porównania liczby q z liczbami $5/2$ oraz $25/12$ (bez użycia kalkulatora, korzystając z nierówności typu: $25 < 27$, $125 < 128$).

135. Która z liczb jest większa $\left(\frac{9}{4}\right)^{9/4}$ czy 6 ?

W rozwiązaniu wolno korzystać z własności potęgowania, wolno wykonywać obliczenia na liczbach naturalnych mniejszych od 100 oraz wolno wykorzystać równości $2^{11} = 2048$ i $3^7 = 2187$.

136. W każdym z czterech poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, postaw sobie 1 punkt. Za pozostałe zadania nie otrzymujesz punktów.

Wyjątki:

Za udzielenie 15 poprawnych odpowiedzi postaw sobie **4 punkty**.

Za udzielenie poprawnych odpowiedzi we wszystkich 16 podpunktach postaw sobie **5 punktów**.

136.1 Czy równość $\binom{2012}{507} + \binom{2012}{n} = \binom{2013}{507}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 506$

b) $n = 508$

c) $n = 1506$

d) $n = 1508$

136.2 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że prawdziwe jest

a) $T(9)$

b) $T(10)$

c) $T(11)$

d) $T(12)$

136.3 O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej $n \geq 10$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że **fałszywe** jest

a) $T(9)$

b) $T(10)$

c) $T(11)$

d) $T(12)$

136.4 Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma $1+2+3+4+\dots+n$ jest parzysta. Czy implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ jest prawdziwa dla

a) $n = 100$

b) $n = 101$

c) $n = 102$

d) $n = 103$

137.1 Zapisz ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6} = \dots\dots$

b) $\frac{1}{8} = \dots\dots$

c) $\frac{1}{9} = \dots\dots$

d) $\frac{1}{11} = \dots\dots$

137.2 Podaj liczbę całkowitą k , dla której podana liczba jest wymierna

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = \dots\dots$

b) $\sqrt{(5-4\sqrt{2})^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = \dots\dots$

c) $\sqrt{(5\sqrt{2}-7)^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = \dots\dots$

d) $\sqrt{(7\sqrt{2}-10)^2} + k\sqrt{2}$ jest wymierna dla $k = \dots\dots$

138. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

138.1 $\dots\dots < 10000! < \dots\dots$

138.2 $\dots\dots < 2^{10000} < \dots\dots$

138.3 $\dots\dots < \binom{10000}{5} < \dots\dots$

138.4 $\dots\dots < 30^{10000} < \dots\dots$

$$138.5 \quad \dots < 2^{2^{10}} < \dots$$

$$138.6 \quad \dots < 666! < \dots$$

$$138.7 \quad \dots < 4444^{4444} < \dots$$

$$138.8 \quad \dots < 7777^{7777} < \dots$$

139. W każdym z ośmiu poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu $0, 1, 2, 5, 10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}$ na kolejnych miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

$$139.1 \quad \dots < (7 + 2\sqrt{2})^{500} < \dots$$

$$139.2 \quad \dots < (6 + 3\sqrt{2})^{500} < \dots$$

$$139.3 \quad \dots < \binom{1000}{3} < \dots$$

$$139.4 \quad \dots < \binom{1000}{4} < \dots$$

$$139.5 \quad \dots < 3^{2000} < \dots$$

$$139.6 \quad \dots < 35000! < \dots$$

$$139.7 \quad \dots < 2011^{2011} < \dots$$

$$139.8 \quad \dots < \sum_{n=1}^{10^{30}} n < \dots$$