

1. Czy podana nierówność jest prawdziwa?

Przypomnienie: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

- a) $[\sqrt{23}] < [\sqrt{27}]$;
- b) $[\sqrt{43}] < [\sqrt{47}]$;
- c) $[\sqrt{63}] < [\sqrt{67}]$;
- d) $[\sqrt{83}] < [\sqrt{87}]$.

2. Czy istnieje liczba zakończona trzema szóstkami podzielna przez

- a) 11;
- b) 9;
- c) 6;
- d) 4?

3. Czy dowolna liczba zakończona trzema szóstkami jest podzielna przez

- a) 6;
- b) 4;
- c) 11;
- d) 9?

4. Czy nierówność $\log_a 2 < \log_b 2$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \sqrt{41} - 4$, $b = \sqrt{43} - 4$;
- b) $a = \sqrt{17} - 4$, $b = \sqrt{19} - 4$;
- c) $a = \sqrt{23} - 4$, $b = \sqrt{29} - 4$;
- d) $a = \sqrt{31} - 4$, $b = \sqrt{37} - 4$?

5. Czy funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \{\sqrt{x}\}$, gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x , jest rosnąca na przedziale

- a) $[2, 4]$;
- b) $[5, 7]$;
- c) $(3, 5)$;
- d) $(7, 9)$?

6. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $(10^7)! < 5 \cdot 10^7$;
- b) $(10^6)! < 4 \cdot 10^6$;
- c) $(10^4)! < 4 \cdot 10^4$;
- d) $(10^5)! < 5 \cdot 10^5$?

7. Czy nierówność $a^c < b^c$ jest prawdziwa dla

- a) $a = \log_2 3, \quad b = \log_2 6, \quad c = (\log_2 4) - 2$;
- b) $a = \log_3 5, \quad b = \log_3 6, \quad c = (\log_3 8) - 2$;
- c) $a = \log_5 9, \quad b = \log_5 6, \quad c = (\log_5 27) - 2$;
- d) $a = \log_4 7, \quad b = \log_4 6, \quad c = (\log_4 9) - 2$?

8. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $(\log_7 81) \cdot \log_9 80$;
- b) $(\log_5 49) \cdot \log_7 50$;
- c) $(\log_3 25) \cdot \log_5 27$;
- d) $(\log_2 9) \cdot \log_3 8$?

9. Czy równość $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_3(\sqrt{26} - 5)$;
- b) $x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$;
- c) $x = \log_2(2 - \sqrt{3})$;
- d) $x = \log_3(4 - \sqrt{15})$?

10. Czy równość $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_6(\sqrt{67} - 8)$;
- b) $x = \log_6(7 - \sqrt{47})$;
- c) $x = \log_5(5 - \sqrt{23})$;
- d) $x = \log_5(\sqrt{27} - 5)$?

11. W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ o sumie 60 i piątym wyrazie równym 10, k -ty wyraz jest równy w .

Dla podanej liczby n podać liczby $k \neq 5$ oraz w tak, aby powyższe zdanie było prawdziwe. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby o żądanej własności nie istnieją.

- a)
 $n = 15, \quad k = \dots, \quad w = \dots$
- b)
 $n = 6, \quad k = \dots, \quad w = \dots$
- c)
 $n = 10, \quad k = \dots, \quad w = \dots$
- d)
 $n = 12, \quad k = \dots, \quad w = \dots$

12. Niech $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

Zapisać wartość podanego iloczynu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

- a)
 $\prod_{i=2}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$
- b)
 $\prod_{i=2}^{15} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$
- c)
 $\prod_{i=2}^{16} \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$
- d)
 $\prod_{i=1}^4 \log_{(3i+1)}(3i+4) = \dots$

13. Dla podanych liczb a, b zapisać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość liczby $\log_x y$, gdzie $x = \log_a b$ oraz $y = \log_b a$. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba ta jest niewymierna.

a)
 $a = 2^{2^{2^7}}, \quad b = 2^{2^{2^{14}}}, \quad \log_x y = \dots$

b)
 $a = 2^{2^{2^{16}}}, \quad b = 2^{2^{2^{32}}}, \quad \log_x y = \dots$

c)
 $a = 2^{2^{2^4}}, \quad b = 2^{2^{2^6}}, \quad \log_x y = \dots$

d)
 $a = 2^{2^{2^9}}, \quad b = 2^{2^{2^{12}}}, \quad \log_x y = \dots$

14. Dla podanej liczby a wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby spełniona była równość $1 + (\log_5 a) + \log_5 b = \log_5 (2a^2 + 2b^2)$.

a)
 $a = 6, \quad b = \dots$

b)
 $a = 2, \quad b = \dots$

c)
 $a = 4, \quad b = \dots$

d)
 $a = 3, \quad b = \dots$

15. Dla podanej liczby naturalnej k podać **największą** liczbę całkowitą dodatnią d , dla której prawdziwe jest następujące zdanie:

Dla dowolnych liczb całkowitych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez k , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

a)
 $k = 2^5 \cdot 3^3, \quad d = \dots$

b)
 $k = 12^3, \quad d = \dots$

c)
 $k = 3^5 \cdot 5^3, \quad d = \dots$

d)
 $k = 12^2, \quad d = \dots$