

Poniedziałek 12 listopada 2012 - zaczynamy od omówienia zadań z kolokwium nr 1.

Wtorek 13 listopada 2012 - **odbywają się zajęcia czwartkowe.**

79. Uprościć wyrażenia

a) $4^{2+\log_2 7}$

b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$

c) $\log_6 2 + \log_{36} 9$

80. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$

b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$

d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$

e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$

f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

g) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

81. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$

c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$

d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$

e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$

f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$

h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$

i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$

j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$

m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$

n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$

o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$

q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$

r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do kilku ostatnich pytań:

Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera.

Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną

82. Czy jest prawdą, że $\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$
- b) $a = 3/2, b = 3$
- c) $a = 2, b = 3$
- d) $a = 3/2, b = 2$
- e) $a = 5, b = 5/4$

83. Czy jest prawdą, że $a \cdot \log_7 b = b \cdot \log_7 a$, jeżeli

- a) $a = 2, b = 3$
- b) $a = 2, b = 4$
- c) $a = 2, b = 5$
- d) $a = 3, b = 4$
- e) $a = 64/27, b = 256/81$

84. Czy jest prawdą, że

- a) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 10$
- b) $2 \cdot \log_3 5 = \log_3 25$
- c) $2 + \log_3 5 = \log_3 10$
- d) $2 + \log_3 5 = \log_3 45$
- e) $\sqrt{(2 - \log_3 7)^2} = 2 - \log_3 7$
- f) $\sqrt{(2 - \log_2 7)^2} = 2 - \log_2 7$
- g) $\sqrt{(2 - \log_5 23)^2} = 2 - \log_5 23$
- h) $\sqrt{(2 - \log_4 17)^2} = 2 - \log_4 17$

85. Dla których liczb naturalnych m i n większych od 1 liczba

$$\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$$

jest wymierna, a dla których niewymierna?

86. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

87. Czy liczba

$$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$$

jest wymierna czy niewymierna?

88. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

89. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

Oznaczenia: Przypominam, że $[x]$ oraz $\{x\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej x .

90. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- a) $[x] = -4, \{x\} < 1/10$
- b) $[x] = -4, \{x\} > 9/10$
- c) $2 \cdot \{x\} \neq \{2x\}, x < 0$
- d) $2 \cdot \{x\} = \{5x\}, x > 10$

91. Podać przykład takich liczb rzeczywistych x, y , że

- a) $[x+y] \neq [x] + [y]$
- b) $[2x+y] = 2[x] + [y] + 2$
- c) $[x+y] = \{x\} + \{y\}, x, y > 0$
- d) $[xy] = [x] \cdot [y] + 10$

92. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste a , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $[x+a] = [x] + a$.

93. Rozwiązać nierówności

- a) $\log_{2x}(x^2+1) \leq \log_{2x}(x^2+3x)$
- b) $(x^2+x+1)^{3x} > (x^2+x+1)^{x+1}$
- c) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
- d) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

94. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb p, q , że p i q są pierwiastkami równania

$$x^2 + px + q = 0.$$

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2 + px + q = (x-p)(x-q).$$

.....
Odpowiedź: Są dwie pary liczb spełniające warunki zadania:

$p = \dots, q = \dots$ oraz $p = \dots, q = \dots$

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2 + p^2 + q = 0$$

oraz

$$q^2 + pq + q = 0.$$

.....
Odpowiedź: Są trzy pary liczb spełniające warunki zadania:

$p = \dots, q = \dots; p = \dots, q = \dots$ oraz $p = \dots, q = \dots$

Dlaczego oba sposoby rozwiązania prowadzą do różnych odpowiedzi?

Powtórka

Uwaga: Poniższe zadania są zadaniami do samodzielnej powtórki - na zajęciach rozwiążemy tylko część zadań z tej listy.

Proszę umieć wskazać zadania, które wymagają omówienia.

Kolokwium nr 2 (6 grudnia 2012) będzie zakładało umiejętność rozwiązania zadań 1-167 oraz umiejętność samodzielnego myślenia.

95. Dane są liczby rzeczywiste x i y spełniające warunki $|x - 4| < 1$ oraz $|y - 4| < 2$. Czy stąd wynika, że

- a) $|x - y| < 2$
- b) $|x + y| > 6$
- c) $|x + y| < 10$
- d) $|xy| > 10$
- e) $|xy| < 40$

96. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

- a) o 2000%
- b) o 1000%
- c) o 400%
- d) o 200%
- e) o 100%
- f) o 20%

97. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

- a) wzrośnie o 20%
- b) zmaleje o 20%
- c) wzrośnie o 50%
- d) zmaleje o 50%
- e) wzrośnie o 100%
- f) zmaleje o 90%

98. W rosnącym postępie arytmetycznym o wyrazach dodatnich ósmy wyraz jest większy od piątego o 20%. Podać przykład takich m i n , że n -ty wyraz jest od m -tego

- a) większy o 100%
- b) mniejszy o 10%
- c) większy o 10%
- d) mniejszy o 1%
- e) większy o 1000%
- f) mniejszy o 99%

99. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q , że liczba q jest od liczby p

- a) większa o 100%
- b) większa o 50%
- c) większa o 40%
- d) większa o 20%
- e) większa o 5%
- f) mniejsza o 5%

100. Dla funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem oraz dla podanego zbioru Z rozstrzygnąć, czy funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze Z oraz podać zbiór wartości funkcji f na zbiorze Z .

- a) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -1)$
- b) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, 4]$
- c) $f(x) = x^2$, $Z = [-3, -2] \cup [3, 5]$
- d) $f(x) = x^2$, $Z = (-3, -2] \cup [3, 4)$
- e) $f(x) = x^2$, $Z = (0, 3)$
- f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- g) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $Z = (0, 3)$
- h) $f(x) = 2^x$, $Z = (-3, 3)$
- i) $f(x) = |2^x - 3|$, $Z = (-3, 3)$
- j) $f(x) = |2^x - 5|$, $Z = (-3, 3)$

101. Czy prawdziwa jest równość

- a) $\log_2 3 = 2 \cdot \log_4 3$;
- b) $\log_2 16 = 2 \cdot \log_3 9$;
- c) $\log_4 9 = 2 \cdot \log_4 3$;
- d) $\log_2 6 = 1 + \log_2 3$?

102. Czy równość $(\sqrt{a})^b = a^{\sqrt{b}}$ jest prawdziwa dla

- a) $a = 16$, $b = 2$;
- b) $a = 1$, $b = 5$;
- c) $a = 11$, $b = 3$;
- d) $a = 6$, $b = 4$?

103. Czy podana liczba jest liczbą całkowitą podzielną przez 10

- a) $\frac{29!}{26!}$;
- b) $\frac{36!}{33!}$;
- c) $\frac{30!}{28!}$;
- d) $\frac{35!}{31!}$?

104. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\sqrt{3} + \sqrt{8} < 5$;
- b) $\sqrt{10} + \sqrt{17} < 7$;
- c) $\sqrt{5} + \sqrt{17} < 6$;
- d) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < 7$?

105. Czy podana liczba jest całkowita

- a) $2^{\log_4 3}$;
- b) $8^{\log_4 25}$;
- c) $4^{\log_2 3}$;
- d) $2^{\log_8 27}$?

106. Wiadomo, że

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003.$$

Czy prawdą jest, że

- a) $\binom{15}{5} = 3003$;
- b) $\binom{16}{10} = 8008$;
- c) $\binom{15}{6} = 5005$;
- d) $\binom{16}{6} = 6006$?

107. Liczby całkowite dodatnie m i n są dzielnikami liczby całkowitej dodatniej k . Czy stąd wynika, że liczba k jest podzielna przez

- a) mn ;
- b) $m+n$;
- c) najmniejszą wspólną wielokrotność liczb m i n ;
- d) największy wspólny dzielnik liczb m i n ?

108. Czy nierówność $3x < x^2 + 2$ jest prawdziwa dla

- a) $x = \log_3 2$;
- b) $x = \log_5 2$;
- c) $x = \log_2 3$;
- d) $x = \log_2 5$?

109. Czy podana liczba jest całkowita

- a) $\frac{15!}{35}$;
- b) $\frac{18!}{38}$;
- c) $\frac{16!}{36}$;
- d) $\frac{17!}{37}$?

110. Czy równanie $x^3 + y^4 = z^5$ jest spełnione przez liczby

- a) $x = 2^8, y = 2^6, z = 2^5$;
- b) $x = 2^{24}, y = 2^{24}, z = 2^{25}$;
- c) $x = 2, y = 2, z = 2$;
- d) $x = 2^{12}, y = 2^9, z = 2^7$?

111. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\frac{11}{17} < \frac{9}{19}$;
- b) $\frac{11}{17} < \frac{11}{19}$;
- c) $\frac{11}{17} < \frac{13}{15}$;
- d) $\frac{11}{17} < \frac{9}{17}$?

112. Czy równanie $a^2 + 2ab + b^2 = c^2$ jest spełnione przez liczby

- a) $a = 175, b = 429, c = 2006$;
- b) $a = 449, b = 409, c = -40$;
- c) $a = -449, b = 409, c = 40$;
- d) $a = 449, b = -409, c = 40$?

113. Czy nierówność $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ jest prawdziwa dla

- a) $x = 9^{37}, y = 25^{13}$;
- b) $x = \log_7 9, y = \log_{11} 37$;
- c) $x = 2006, y = 8024$;
- d) $x = \binom{17}{5}, y = \binom{17}{6}$?

114. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2^{1000} < 8^{400}$;
- b) $5^{1003} < 25^{600}$;
- c) $3^{1001} < 9^{500}$;
- d) $4^{1002} < 2^{2006}$?

115. Czy dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi równość

$$(x^a)^b = x^a \cdot x^b,$$

jeżeli

- a) $a = 2, b = 2$;
- b) $a = 2, b = 5/2$;
- c) $a = 3, b = 3$;
- d) $a = 3, b = 3/2$?

116. Niech $a_n = \frac{n!}{37^n}$. Czy wtedy

- a) $a_{10} < a_{20}$;
- b) $a_{40} < a_{50}$;
- c) $a_{36} < a_{37}$;
- d) $a_{37} < a_{38}$?

117. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d , że liczby $a+b+c$ oraz $b+c+d$ są nieparzyste. Czy stąd wynika, że

- a) liczba $a+d$ jest nieparzysta;
- b) liczba $b+c$ jest parzysta;
- c) liczba $a+d$ jest parzysta;
- d) liczba $b+c$ jest nieparzysta?

118. Liczby rzeczywiste dodatnie x i y spełniają nierówność $|x-y| < 1$. Czy stąd wynika, że

- a) $|x^2 - y^2| < 1$;
- b) $x^2 + y^2 < (x+y)^2$;
- c) $x+y < 1$;
- d) $|x^2 - y^2| < x+y$?

119. Czy istnieje taka liczba rzeczywista M , że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

- a) $\frac{n}{n+1} < M$;
- b) $\frac{n^2+1}{n+1} < M$;
- c) $\frac{n+1}{n} < M$;
- d) $\frac{n+1}{n^2+1} < M$?

120. Dowolna liczba całkowita dodatnia jest podzielna przez mn wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednocześnie podzielna przez m i przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 12, n = 15$;
- b) $m = 15, n = 22$;
- c) $m = 13, n = 18$;
- d) $m = 14, n = 21$?

121. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 zachodzi równość

- a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$;
- b) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$;
- c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$;
- d) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$?

122. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $\log_2 5 < \log_3 5$;
- b) $\log_{0,2} 7 < \log_3 7$;
- c) $\log_{0,2} 7 < \log_{0,3} 7$;
- d) $\log_2 7 < \log_{0,3} 7$?

123. Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

- a) $(2^{2^n})^2 = 2^{2^{n+1}}$;
- b) $(2^{2^n})^8 = 2^{2^{n+4}}$;
- c) $(2^{2^n})^4 = 2^{2^{n+2}}$;
- d) $(2^{2^n})^6 = 2^{2^{n+3}}$?

UWAGA: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$

124. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki $|x-2| < 1$, $|y-3| < 1$ oraz $|z-5| < 1$ zachodzi nierówność

- a) $x+y+z < 12$;
- b) $xyz > 10$;
- c) $x+y+z > 7$;
- d) $xyz < 60$?

125. Czy liczba $\log_4(n^2 + 7)$ jest wymierna dla

- a) $n = 1$;
- b) $n = 7$;
- c) $n = 3$;
- d) $n = 5$?

126. Czy jest prawdą, że

- a) $\log_5 26 < \sqrt{22} - 3$;
- b) $\log_2 26 < \sqrt{14}$;
- c) $\log_3 26 < \sqrt{18} - 1$;
- d) $\log_2 26 < \sqrt{26}$?

127. Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})^2} + \sqrt{(7 - 2\sqrt{6})^2}$;
- b) $\sqrt{(5 + 2\sqrt{10})^2} + \sqrt{(6 - 2\sqrt{10})^2}$;
- c) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{7})^2} + \sqrt{(6 - 2\sqrt{7})^2}$;
- d) $\sqrt{(4 + 2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})^2}$?

128. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $(50!)^{100} < (100!)^{50}$;
- b) $5^{222} < 3^{333}$;
- c) $100! < 10^{200}$;
- d) $100! < 100^{45}$?

129. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a+b$ oraz $a+b+c$ są wymierne. Czy stąd wynika, że

- a) liczba a jest wymierna;
- b) liczba b jest niewymierna;
- c) liczba c jest wymierna;
- d) liczba $b+c$ jest wymierna?

130. Dla dowolnej liczby naturalnej k liczba k^3 jest podzielna przez m wtedy i tylko wtedy, gdy liczba k^3 jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $m = 2^3, n = 2^4$;
- b) $m = 2^8, n = 2^{10}$;
- c) $m = 2^5, n = 2^6$;
- d) $m = 2^7, n = 2^9$?

131. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- a) $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$;
- b) $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$;
- c) $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$;
- d) $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$?

132. Czy istnieje liczba naturalna, której kwadrat

- a) ma sumę cyfr równą 12;
- b) jest zakończony cyframi ...222;
- c) ma sumę cyfr równą 13;
- d) ma sumę cyfr równą 14?

133. Czy funkcja f określona wzorem $f(x) = \{x\}$ (część ułamkowa) jest różnowartościowa na przedziale

- a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$;
- b) $\left[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$;
- c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$;
- d) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$?

134. Obliczyć (znak $[]$ oznacza część całkowitą)

- a)
 $\left[\sqrt{90} + 1\right] = \dots\dots\dots$
- b)
 $\left[\sqrt{60} + 4\right] = \dots\dots\dots$
- c)
 $\left[\sqrt{80} + 2\right] = \dots\dots\dots$
- d)
 $\left[\sqrt{70} + 3\right] = \dots\dots\dots$

135. Podać zbiór rozwiązań nierówności

a)

$$-1 \leq x^2 < 25 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

b)

$$1 \leq x^5 < 32 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

c)

$$-1 \leq x^3 < 27 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

d)

$$1 \leq x^4 < 16 \Leftrightarrow x \in \dots\dots\dots$$

136. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

a)

$$\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots\dots\dots$$

b)

$$3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots\dots\dots$$

c)

$$2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24 = \dots\dots\dots$$

d)

$$\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24 = \dots\dots\dots$$

137. Wskazać taką liczbę naturalną k , że

$$10^k < n < 10^{2k}.$$

a)

$$n = 3000!, \quad k = \dots\dots\dots$$

b)

$$n = 2^{1200} \cdot (100!)^{10}, \quad k = \dots\dots\dots$$

c)

$$n = 6^{666}, \quad k = \dots\dots\dots$$

d)

$$n = 77^7, \quad k = \dots\dots\dots$$

138. Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c , że liczby

$$\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

a) $a = 64, b = 8, c = \dots\dots\dots$

b) $a = 64, b = 16, c = \dots\dots\dots$

c) $a = 4, b = 8, c = \dots\dots\dots$

d) $a = 2, b = 8, c = \dots\dots\dots$

144. Czy istnieją takie liczby naturalne a, b , że liczba $\text{NWD}(a, b)$ stanowi $p\%$ liczby $\text{NWW}(a, b)$, jeżeli

- a) $p = 15$;
- b) $p = 40$;
- c) $p = 20$;
- d) $p = 25$?

145. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $2^{29} < 3^{21}$;
- b) $2^{51} < 3^{29}$;
- c) $2^{40} < 3^{24}$;
- d) $2^{42} < 3^{28}$?

146. Czy istnieje taka liczba pierwsza p , że liczbą pierwszą jest również liczba

- a) $p^2 + 2$;
- b) $p^2 + 26$;
- c) $p^2 + 8$;
- d) $p^2 + 14$?

147. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli liczba m^n (m do potęgi n) jest podzielna przez d , to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 9$;
- b) $d = 12$;
- c) $d = 10$;
- d) $d = 11$?

148. Dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n , jeżeli iloczyn kmn jest podzielny przez d^2 , to co najmniej jedna z liczb k, m, n jest podzielna przez d . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $d = 8$;
- b) $d = 11$;
- c) $d = 9$;
- d) $d = 10$?

149. Podać największy wspólny dzielnik liczb

- a) $\text{NWD}(9!, 9^9) = \dots$
- b) $\text{NWD}(12!, 12^{12}) = \dots$
- c) $\text{NWD}(10!, 10^{10}) = \dots$
- d) $\text{NWD}(11!, 11^{11}) = \dots$

150. Podać zbiór rozwiązań nierówności

- a) $-4 < x^2 < 9$
- b) $8 < x^3 < 27$
- c) $4 < x^2 < 9$
- d) $-8 < x^3 < 27$

151. Podać przykład ciągu arytmetycznego n -wyrazowego o sumie wyrazów równej n , zawierającego wyraz równy 0

- a) $n = 3$
- b) $n = 6$
- c) $n = 4$
- d) $n = 5$

152. Wskazać dowolny dzielnik pierwszy podanej liczby

- a) $13^{13} - 6^{13}$
- b) $37^{37} + 12^{37}$
- c) $13^{13} + 6^{13}$
- d) $37^{37} - 12^{37}$

153. Dana jest liczba naturalna n . Niech D będzie zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby n , a W zbiorem jej wszystkich wielokrotności. Napisz, czemu jest równa podana liczba (możesz też napisać *nie istnieje*, jeśli uważasz, że podana liczba nie istnieje).

- a) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru D
- b) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru W
- c) Najmniejsza wspólna wielokrotność wszystkich liczb ze zbioru D
- d) Największy wspólny dzielnik wszystkich liczb ze zbioru W

154. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{6}$;
- b) $9 - 4\sqrt{5} < \frac{1}{18}$;
- c) $3\sqrt{3} - 5 < \frac{1}{5}$;
- d) $7 - 5\sqrt{2} < \frac{1}{15}$?

155. Czy prawdziwa jest nierówność

- a) $242^7 < 121^8$;
- b) $266^7 < 133^8$;
- c) $250^7 < 125^8$;
- d) $260^7 < 130^8$?

156. W dowolnym postępie arytmetycznym 4-wyrazowym a_1, a_2, a_3, a_4 zachodzi równość

$$a_1 + Xa_3 = Ya_2 + a_4.$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $X = 2, Y = 2$;
- b) $X = 5, Y = 6$;
- c) $X = 3, Y = 3$;
- d) $X = 4, Y = 5$?

157. Czy nierówność $\log_a 3 < \log_a 7$ jest prawdziwa dla

- a) $a = (\sqrt{63} - 9)^{2010}$;
- b) $a = (\sqrt{93} - 9)^{2014}$;
- c) $a = (\sqrt{73} - 9)^{2012}$;
- d) $a = (\sqrt{83} - 9)^{2013}$?

158. Suma dowolnego postępu arytmetycznego n -wyrazowego o wszystkich wyrazach będących liczbami naturalnymi jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2011$;
- b) $n = 2014$;
- c) $n = 2012$;
- d) $n = 2013$?

159. Czy liczba $\log_x y$ jest wymierna dla

- a) $x = \log_2 3, y = \log_3 2$;
- b) $x = \log_{243} 2187, y = \log_{2187} 243$;
- c) $x = \log_3 5, y = \log_5 3$;
- d) $x = \log_{128} 1024, y = \log_{1024} 128$?

160. Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c, d , jeżeli iloczyn $abcd$ jest podzielny przez n^3 , to co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest podzielna przez n . Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

- a) $n = 2$;
- b) $n = 16$;
- c) $n = 4$;
- d) $n = 8$?

161. Czy równość

$$(\log_a b)^{\log_c d} = d^{\log_c \log_a b}$$

jest prawdziwa dla

- a) $a = 2, b = 4, c = 8, d = 16$;
- b) $a = 2, b = 3, c = 5, d = 7$;
- c) $a = 3, b = 9, c = 5, d = 25$;
- d) $a = 4, b = 3, c = 8, d = 27$?

162. Niech $A(n) = \sqrt[n]{n}$. Czy liczba $\log_{A(n)} A(k)$ jest całkowita, jeżeli

- a) $n = 16, k = 4$;
- b) $n = 64, k = 8$;
- c) $n = 16, k = 8$;
- d) $n = 64, k = 4$?

163. Niech

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Czy podana liczba jest wymierna

- a) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+1)$;
- b) $\prod_{i=3}^9 \log_i(i+1)$;
- c) $\prod_{i=2}^9 \log_i(i+1)$;
- d) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+1)$?

164. Przyjmujemy oznaczenia jak w zadaniu poprzednim. Podać wartość podanej liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, jeśli liczba jest wymierna. Napisać literkę **N**, jeżeli liczba jest niewymierna.

a) $\prod_{i=2}^7 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

b) $\prod_{i=3}^8 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

c) $\prod_{i=2}^8 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

d) $\prod_{i=3}^7 \log_i(i+2) = \dots\dots\dots$

165. Dla podanej liczby a podać taką liczbę b (w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego), aby spełniona była równość

$$\log_7 a + \log_7 b = \log_7(a+b).$$

a) $a = 5/2, \quad b = \dots\dots\dots$

b) $a = 8/3, \quad b = \dots\dots\dots$

c) $a = 3, \quad b = \dots\dots\dots$

d) $a = 7/2, \quad b = \dots\dots\dots$

166. Niech

$$A(n) = 3^{3^n}$$

$$B(n) = \log_3 A(n)$$

$$C(n) = \log_{A(n)} A(n+1)$$

$$D(n) = \log_{C(n)} B(n).$$

Zapisać podane liczby w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

PRZYPOMNIENIE: Potęgowanie wykonujemy **od góry**: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

a) $D(9) = \dots\dots\dots$

b) $D(243) = \dots\dots\dots$

c) $D(27) = \dots\dots\dots$

d) $D(81) = \dots\dots\dots$

167. Podać przykład liczby niecałkowitej x spełniającej podane równanie, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y . Wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego (taka postać odpowiedzi jest częścią zadania, więc wyniki poprawne, ale w innej postaci, nie będą uznawane).

a) $\{x\} = \{3x\}, \quad x = \dots\dots\dots$

b) $\{2x\} = \{13x\}, \quad x = \dots\dots\dots$

c) $\{x\} = \{4x\}, \quad x = \dots\dots\dots$

d) $\{2x\} = \{7x\}, \quad x = \dots\dots\dots$