

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 5.02.2014

12 zadań po 5 punktów, progi: 30=3.0, 36=3.5, 42=4.0, 48=4.5, 54=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za podanie kresu w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

1.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 108} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
---	-------------

inf $A = 0$	sup $A = 1/8$
-------------	---------------

Czy kres dolny należy do zbioru A NIE	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
--	--

1.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 98} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
--	-------------

inf $B = -1$	sup $B = 1/2$
--------------	---------------

Czy kres dolny należy do zbioru B TAK	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
--	--

1.3. $C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 88} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
--	-------------

inf $C = -1/3$	sup $C = 1/4$
----------------	---------------

Czy kres dolny należy do zbioru C TAK	Czy kres górny należy do zbioru C TAK
--	--

1.4. $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2 \cdot n^2 \leq (m+n)^2 \leq 3 \cdot n^2 \right\}$	Ocena
---	-------------

inf $D = \sqrt{2} - 1$	sup $D = \sqrt{3} - 1$
------------------------	------------------------

Czy kres dolny należy do zbioru D NIE	Czy kres górny należy do zbioru D NIE
--	--

1.5. $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16 \cdot n^2 \leq (m+n)^2 \leq 36 \cdot n^2 \right\}$	Ocena
---	-------------

inf $E = 3$	sup $E = 5$
-------------	-------------

Czy kres dolny należy do zbioru E TAK	Czy kres górny należy do zbioru E TAK
--	--

Zadanie **2.**

Przy każdym z poniższych 12 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 7)$ punktów.**

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej $n \neq 2$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(2)$ **P**

b) $T(3)$ **N**

c) $T(4)$ **N**

d) $T(2) \Rightarrow T(666)$ **N**

e) $T(3) \Rightarrow T(666)$ **P**

f) $T(4) \Rightarrow T(666)$ **P**

g) $T(666) \Rightarrow T(2)$ **P**

h) $T(666) \Rightarrow T(3)$ **N**

i) $T(666) \Rightarrow T(4)$ **N**

j) $T(4) \Rightarrow T(3)$ **N**

k) $T(4) \Rightarrow T(2)$ **P**

l) $T(3) \Rightarrow T(2)$ **P**

Zadanie **3.**

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy ciągu (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-4)$ punktów**.

$$3.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n+9)}{\log_3 n} = \mathbf{1}$$

$$3.2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n+9) - \log_3 n) = \mathbf{0}$$

$$3.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+9) = \mathbf{1}$$

$$3.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(9n+1)}{\log_3 n} = \mathbf{1}$$

$$3.5. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(9n+1) - \log_3 n) = \mathbf{2}$$

$$3.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(9n+1) = \mathbf{1}$$

$$3.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n^9+1)}{\log_3 n} = \mathbf{9}$$

$$3.8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n^9+1) - \log_3 n) = \mathbf{+\infty}$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^9+1) = \mathbf{9}$$

Zadanie **4.**

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 1)$ punktów**.

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$

b) $a = -2$, $b = 2$, $c = 2$

c) $a = -3$, $b = 3$, $c = 3$

d) $a = 4$, $b = -4$, $c = -4$

e) $a = -5$, $b = 5$, $c = 5$

f) $a = -6$, $b = 6$, $c = 6$

Zadanie 5.

W każdym z poniższych 7 pytań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **Nie** wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 2)$ punktów.

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 123, a pierwszy wyraz jest równy 10. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \mathbf{N}$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_1) = \mathbf{R} \text{ (uznajemy też } +\infty)$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot a_1) = \mathbf{1230}$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1} = \mathbf{R} \text{ (uznajemy też } +\infty)$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 1} - \sqrt{a_n^2 + 1} \right) = \mathbf{1 - \sqrt{101}}$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 4} - \sqrt{a_n^2 + 1} \right) = \mathbf{R} \text{ (uznajemy też } +\infty)$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 4} - \sqrt{a_n^2 + 4} \right) = \mathbf{2 - \sqrt{104}}$$

Zadanie **6.**

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 7)$ punktów**.

Czy zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla

6.1. $z = 1$ **NIE**

6.2. $z = -1$ **TAK**

6.3. $z = i$ **TAK**

6.4. $z = \frac{3+4i}{5}$ **TAK**

6.5. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ **TAK**

6.6. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ **TAK**

6.7. $z = \frac{5+5i}{7}$ **NIE**

6.8. $z = \frac{7-4i}{8}$ **NIE**

6.9. $z = \frac{2+2i}{3}$ **TAK**

6.10. $z = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ **TAK**

6.11. $z = 3i \cdot \log_{26} 3$ **NIE**

6.12. $z = 2i \cdot \log_{26} 5$ **TAK**

Zadanie 7.

Wyznaczyć **promień** zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((3n)!)^{2n} \cdot x^{6n^2}}{((2n)!)^{3n}}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{((3n)!)^{2n} \cdot x^{6n^2}}{((2n)!)^{3n}}} = \frac{((3n)!)^2 \cdot x^{6n}}{((2n)!)^3} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) , przy założeniu $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{((3n+3)!)^2 \cdot x^{6n+6}}{((2n+2)!)^3} \cdot \frac{((2n)!)^3}{((3n)!)^2 \cdot x^{6n}} = \frac{((3n+3)!)^2}{((3n)!)^2} \cdot \frac{((2n)!)^3}{((2n+2)!)^3} \cdot x^6 = \\ &= \frac{(3n+3)^2 \cdot (3n+2)^2 \cdot (3n+1)^2}{(2n+2)^3 \cdot (2n+1)^3} \cdot x^6 = \frac{\left(3+\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \left(3+\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(3+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot x^6 \rightarrow \frac{3^6 \cdot x^6}{2^6} \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $\frac{3^6 \cdot x^6}{2^6} < 1$, czyli

$$|x| < \frac{2}{3},$$

to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu potęgowego danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{3^6 \cdot x^6}{2^6} > 1$, czyli

$$|x| > \frac{2}{3},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $2/3$.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $2/3$.

Punktacja za częściowe rozwiązania:

2 punkty za zastosowanie kryterium Cauchy'ego do danego szeregu potęgowego i poprawne wyliczenie b_n .

3-ci punkt za rozpoczęcie stosowania kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) .

4-ty punkt za wyliczenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^6 \cdot x^6}{2^6}.$$

Zadanie 8.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$\left(\frac{15}{4}\right)^n = \left(\frac{15}{4}\right)^1 = \frac{15}{4},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 15/4$, jest więc prawdziwa, gdyż $4 = 16/4$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} > \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+4}{n+1} &= \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} = \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \\ &> \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+3)(2n+4) \geq 15(n+1)(n+3),$$

$$4(4n^2 + 14n + 12) \geq 15(n^2 + 4n + 3),$$

$$16n^2 + 56n + 48 \geq 15n^2 + 60n + 45,$$

$$n^2 - 4n + 3 \geq 0,$$

$$(n-1)(n-3) \geq 0,$$

co jest prawdą dla wszystkich liczb całkowitych $n \neq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n = 1$ oraz $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Sprawdzenie dla $n = 2$ nie jest konieczne, gdyż drugi krok indukcyjny został przeprowadzony także dla $n = 1$, dowodząc tym samym implikacji $T(1) \Rightarrow T(2)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Jednak bezpośrednie sprawdzenie danej w treści zadania nierówności dla $n = 2$ może być uznane za prostsze, niż powoływanie się na mini-dowód indukcyjny działający dla $n \leq 2$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym w dowodzie dla $n \geq 3$) Dla $n = 3$ dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$\binom{8}{3} > \left(\frac{15}{4}\right)^3,$$

co jest kolejno równoważne nierównościom:

$$56 > \frac{15^3}{4^3},$$

$$56 \cdot 64 > 15^3,$$

$$28 \cdot 128 > 3^3 \cdot 5^3,$$

$$28 \cdot 128 > 27 \cdot 125,$$

a ta nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w iloczynie po jej lewej stronie są większe od odpowiednich czynników po stronie prawej.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona w jednym dowodzie indukcyjnym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a w drugim dowodzie indukcyjnym dla $n \leq 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \frac{15}{4},$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, to 2 punkty. To samo,

gdy brak jest świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 4$, jeżeli z rozwiązania nie wynika (np. z powodu użycia ostrej nierówności ♠), że została udowodniona implikacja $T(3) \Rightarrow T(4)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością.

Jeżeli jedyną usterką rozwiązania jest nierozważenie przypadku $n = 2$ – brak sprawdzenia i brak powołania się na mini-indukcję z implikacją $T(1) \Rightarrow T(2)$ – rozwiązanie powinno być ocenione na **4 punkty**.

Zadanie 9.

Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $|q| < 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4 (q^4)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = \frac{1}{2} \\ \frac{c^2}{1-q^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{c^4}{1-q^4} = \frac{1}{5}, \end{cases} \quad (\spadesuit)$$

czyli

$$\begin{cases} 2c = 1-q \\ 2c^2 = 1-q^2 \\ 5c^4 = 1-q^4. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c = \frac{1-q}{2},$$

co po podstawieniu do drugiego równania i uwzględnieniu, że $1-q \neq 0$, daje kolejno

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{(1-q)^2}{2^2} &= 1-q^2, \\ \frac{(1-q)^2}{2} &= (1-q) \cdot (1+q), \end{aligned}$$

$$\frac{1-q}{2} = 1+q,$$

$$1-q = 2+2q,$$

$$-1 = 3q,$$

$$q = -1/3, \quad c = 2/3.$$

Para $(c, q) = (2/3, -1/3)$ jest jedyną parą liczb spełniającą pierwsze dwa równania układu ($\spadesuit$). Należy sprawdzić, że spełnia ona także trzecie równanie tego układu:

$$\frac{c^4}{1-q^4} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = -1/3$, $c = 2/3$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{3^n}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n-1}}{3^n}.$$

Uwaga: Nie istnieje szereg o wyrazach nieujemnych spełniający warunki zadania, gdyż dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2.$$

Punktacja:

Punktacja częściowych rozwiązań wykorzystujących zaprezentowaną wyżej metodę konstrukcji przykładu:

Za uzyskanie dwóch równań układu ($\spadesuit$) - **1 punkt**.

Za uzyskanie układu trzech równań ($\spadesuit$) - **razem 2 punkty**.

Za poprawne wyliczenie $(c, q) = (2/3, -1/3)$ przy wykorzystaniu co najmniej dwóch równań - **razem 3 punkty**.

Za sprawdzenie, że para $(c, q) = (2/3, -1/3)$ spełnia także trzecie równanie - **razem 4 punkty**.

Zadanie 10.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 0}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)} \geq \frac{(3n+1) \cdot (3n+4)}{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{3n-2}{2n+1} &\geq \frac{3n+4}{2n+7}, \\ (3n-2) \cdot (2n+7) &\geq (3n+4) \cdot (2n+1), \\ 6n^2 + 21n - 4n - 14 &\geq 6n^2 + 3n + 8n + 4, \\ 6n^2 + 17n - 14 &\geq 6n^2 + 11n + 4, \\ 6n &\geq 18, \\ n &\geq 3. \end{aligned}$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 3$.

Oznacza to, że dany w zadaniu szereg nie spełnia założeń kryterium Leibniza, ale spełnia je szereg

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)},$$

który wobec tego jest zbieżny. Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, zbieżny jest także szereg dany w treści zadania.

Punktacja:

Rozwiązania wykazujące brak świadomości, że należy oprzeć rozwiązanie na kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych i sprawdzić monotoniczność ciągu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu - **0 punktów**.

Sformułowanie warunków kryterium Leibniza, stwierdzenie, że warunek 1° jest spełniony oraz sprawdzenie warunku 2° - **1 punkt**.

Udowodnienie, że ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący od wyrazu 3-go (lub od jakiegokolwiek dalszego - przy wyborze innej metody dowodu) - **kolejne 2 punkty**.

Końcowe uzasadnienie, że dany w zadaniu szereg jest zbieżny (z powołaniem się na niezależność zbieżności od zmiany lub pominięcia skończenia wielu wyrazów) - **kolejne 2 punkty**.

Zadanie 11.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^4 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^4 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 1) - (y^4 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} \right| = \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1} \right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} < 1. \quad (4)$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt[4]{y^4+1}} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{y^4+1}} \leq |x-y| \cdot 1 \cdot 1 = |x-y|. \end{aligned}$$

Punktacja za poszczególne elementy rozwiązania:

Doprowadzenie przekształceń do (1) - **1 punkt**

Doprowadzenie przekształceń do (2) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (3) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (4) - **1 punkt**

Dokończenie rozwiązania - **1 punkt**

Zadanie 12.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n + 1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n + 3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n + 9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n + 27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n + 3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 3^n}} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak n -ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n + 0}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n + 0}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n + 0}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n + 0}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n + 0}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 0}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{2^n} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n + 3^n}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n + 3^n}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n + 3^n}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n + 3^n}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n + 3^n}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 3^n}} = \\ &= \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 3^n}} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę wyrazów n -tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{2^n}{2^n} = 1 \rightarrow 1$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{4^n + 3^n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}} \rightarrow 1.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n ,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 .$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

Punktacja za częściowe rozwiązania:

0 punktów za próbę szacowania sumy przez liczbę składników razy wspólne szacowanie składników, przy braku świadomości, aby najpierw szacować tylko mianowniki.

2 punkty za wykonanie oszacowań przez a_n i c_n (bez wysumowania współczynników dwumianowych).