

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 5.02.2014

12 zadań po 5 punktów, progi: 30=3.0, 36=3.5, 42=4.0, 48=4.5, 54=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za podanie kresu w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{1.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 108} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena} \dots\dots$$

$$\inf A = \dots\dots\dots \quad \sup A = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{1.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 98} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena} \dots\dots$$

$$\inf B = \dots\dots\dots \quad \sup B = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{1.3.} \quad C = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 88} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena} \dots\dots$$

$$\inf C = \dots\dots\dots \quad \sup C = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{1.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2 \cdot n^2 \leq (m+n)^2 \leq 3 \cdot n^2 \right\} \quad \text{Ocena} \dots\dots$$

$$\inf D = \dots\dots\dots \quad \sup D = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{1.5.} \quad E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16 \cdot n^2 \leq (m+n)^2 \leq 36 \cdot n^2 \right\} \quad \text{Ocena} \dots\dots$$

$$\inf E = \dots\dots\dots \quad \sup E = \dots\dots\dots$$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 2.

Przy każdym z poniższych 12 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 7)$ punktów.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej $n \neq 2$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(2)$

b) $T(3)$

c) $T(4)$

d) $T(2) \Rightarrow T(666)$

e) $T(3) \Rightarrow T(666)$

f) $T(4) \Rightarrow T(666)$

g) $T(666) \Rightarrow T(2)$

h) $T(666) \Rightarrow T(3)$

i) $T(666) \Rightarrow T(4)$

j) $T(4) \Rightarrow T(3)$

k) $T(4) \Rightarrow T(2)$

l) $T(3) \Rightarrow T(2)$

Zadanie **3.**

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy ciągu (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli granica nie istnieje (tzn. gdy ciąg występujący pod znakiem granicy jest rozbieżny, ale nie jest to rozbieżność do $+\infty$ ani do $-\infty$).

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n-4)$ punktów**.

3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n+9)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n+9) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$

3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+9) = \dots\dots\dots$

3.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(9n+1)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

3.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(9n+1) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$

3.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(9n+1) = \dots\dots\dots$

3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n^9+1)}{\log_3 n} = \dots\dots\dots$

3.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n^9+1) - \log_3 n) = \dots\dots\dots$

3.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n^9+1) = \dots\dots\dots$

Zadanie **4.**

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 1)$ punktów.**

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = a \cdot \{2x\} + b \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x + \frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a = 1$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

b) $a = \dots\dots\dots$, $b = 2$, $c = \dots\dots\dots$

c) $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 3$

d) $a = 4$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

e) $a = \dots\dots\dots$, $b = 5$, $c = \dots\dots\dots$

f) $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = 6$

Zadanie 5.

W każdym z poniższych 7 pytań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Zbieżny** (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **Rozbieżny** (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **Nie** wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 2)$ punktów.

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 123, a pierwszy wyraz jest równy 10. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \dots\dots\dots$

5.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_1) = \dots\dots\dots$

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot a_1) = \dots\dots\dots$

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 1} = \dots\dots\dots$

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 1} - \sqrt{a_n^2 + 1} \right) = \dots\dots\dots$

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 4} - \sqrt{a_n^2 + 1} \right) = \dots\dots\dots$

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_{n+1}^2 + 4} - \sqrt{a_n^2 + 4} \right) = \dots\dots\dots$

Zadanie 6.

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 7)$ punktów**.

Czy zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla

6.1. $z = 1$

6.2. $z = -1$

6.3. $z = i$

6.4. $z = \frac{3+4i}{5}$

6.5. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

6.6. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$

6.7. $z = \frac{5+5i}{7}$

6.8. $z = \frac{7-4i}{8}$

6.9. $z = \frac{2+2i}{3}$

6.10. $z = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

6.11. $z = 3i \cdot \log_{26} 3$

6.12. $z = 2i \cdot \log_{26} 5$

Zadanie 7.

Wyznaczyć **promień** zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((3n)!)^{2n} \cdot x^{6n^2}}{((2n)!)^{3n}}.$$

Zadanie 8.

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Zadanie 9.

Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}.$$

Zadanie 10.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}.$

Zadanie 11.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Zadanie 12.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n + 1}} + \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n + 3}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n + 9}} + \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n + 27}} + \dots + \frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n + 3^{n-1}}} + \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n + 3^n}} \right).$$