

EGZAMIN, ANALIZA 1A, 17.02.2014

12 zadań po 5 punktów, progi: 30=3.0, 36=3.5, 42=4.0, 48=4.5, 54=5.0

Zadanie 1.

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj (w postaci uproszczonej) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.

Za podanie kresu w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

1.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 27} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
--	-------------

$\inf A = -1/2$	$\sup A = 1/9$
-----------------	----------------

Czy kres dolny należy do zbioru A TAK	Czy kres górny należy do zbioru A TAK
--	--

1.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 32} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
--	-------------

$\inf B = -1/7$	$\sup B = 1/4$
-----------------	----------------

Czy kres dolny należy do zbioru B TAK	Czy kres górny należy do zbioru B TAK
--	--

1.3. $C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{n^2} \leq 2^{(m+n)^2} \leq 5^{n^2} \right\}$	Ocena
---	-------------

$\inf C = \sqrt{\log_2 3} - 1$	$\sup C = \sqrt{\log_2 5} - 1$
--------------------------------	--------------------------------

Czy kres dolny należy do zbioru C NIE	Czy kres górny należy do zbioru C NIE
--	--

1.4. $D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{n^2} \leq 2^{(m+n)^2} \leq 8^{n^2} \right\}$	Ocena
---	-------------

$\inf D = \sqrt{2} - 1$	$\sup D = \sqrt{3} - 1$
-------------------------	-------------------------

Czy kres dolny należy do zbioru D NIE	Czy kres górny należy do zbioru D NIE
--	--

1.5. $E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 16^{n^2} \leq 2^{(m+n)^2} \leq 32^{n^2} \right\}$	Ocena
---	-------------

$\inf E = 1$	$\sup E = \sqrt{5} - 1$
--------------	-------------------------

Czy kres dolny należy do zbioru E TAK	Czy kres górny należy do zbioru E NIE
--	--

Zadanie **2.**

Przy każdym z poniższych 12 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 7)$ **punktów**.

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$,
- dla $n = 10$ implikacja $T(n+1) \Rightarrow T(n)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(1)$ **F**

b) $T(9)$ **F**

c) $T(10)$ **F**

d) $T(11)$ **P**

e) $T(12)$ **P**

f) $T(666)$ **P**

g) $T(2) \Rightarrow T(7)$ **P**

h) $T(7) \Rightarrow T(2)$ **P**

i) $T(112) \Rightarrow T(997)$ **P**

j) $T(997) \Rightarrow T(112)$ **P**

k) $T(5) \Rightarrow T(2014)$ **P**

l) $T(2014) \Rightarrow T(5)$ **F**

Zadanie **3.**

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a < b$, aby funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie otrzymasz **jeden punkt**.

3.1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 1.$$

3.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

3.3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+2 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -1, \quad b = 2.$$

3.4.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ x+6 & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = -2, \quad b = 3.$$

3.5.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < a \\ 2x & \text{dla } a \leq x < b \\ x^2 & \text{dla } b \leq x \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2.$$

Zadanie **4.**

W każdym z poniższych 12 pytań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 7)$ punktów.**

4.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{17}-3)x = -\infty$

4.2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(\sqrt{13}-3)x = +\infty$

4.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{17}-3)x = +\infty$

4.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(\sqrt{13}-3)x = -\infty$

4.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{17}-3)^x = +\infty$

4.6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13}-3)^x = 0$

4.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{17}-3)^x = 0$

4.8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{13}-3)^x = +\infty$

4.9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

4.10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} 2x = \pi/2$

4.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{17}-4)x = \pi/2$

4.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(\sqrt{13}-4)x = -\pi/2$

Zadanie **5.**

W każdym z poniższych 6 pytań podaj wartość granicy ciągu lub granicy niewłaściwej $+\infty = \infty$ albo $-\infty$.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz **$\max(0, n - 1)$ punktów**.

5.1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = 1/2$

5.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + n}) = 3/2$

5.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - \sqrt{n^2 + 2n}) = 7/2$

5.4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 16n} - \sqrt{n^2 + 3n}) = 13/2$

5.5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 25n} - \sqrt{n^2 - n}) = 13$

5.6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 36n} - \sqrt{|n^2 - 4n|}) = 20$

Zadanie 6.

Na każde z poniższych 19 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\max(0, n - 14)$ punktów.

Ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\forall_n |a_n - 5| < \frac{n+1}{n}.$$

Czy stąd wynika, że

6.1. ciąg (a_n) jest zbieżny **NIE**

6.2. ciąg (a_n) jest rozbieżny **NIE**

6.3. ciąg (a_n) jest ograniczony **TAK**

6.4. $\forall_n a_n \geq 0$ **TAK**

6.5. $\exists_m \forall_{n \geq m} a_n \geq 0$ **TAK**

6.6. $\forall_m \exists_{n \geq m} a_n \geq 0$ **TAK**

6.7. $\exists_n a_n \geq 0$ **TAK**

6.8. $\forall_n a_n \leq 6$ **NIE**

6.9. $\exists_m \forall_{n \geq m} a_n \leq 6$ **NIE**

6.10. $\forall_m \exists_{n \geq m} a_n \leq 6$ **NIE**

6.11. $\exists_n a_n \leq 6$ **NIE**

6.12. $\forall_n a_n > 3$ **TAK**

6.13. $\exists_m \forall_{n \geq m} a_n > 3$ **TAK**

6.14. $\forall_m \exists_{n \geq m} a_n > 3$ **TAK**

6.15. $\exists_n a_n > 3$ **TAK**

6.16. $\forall_n a_n > \pi$ **NIE**

6.17. $\exists_m \forall_{n \geq m} a_n > \pi$ **TAK**

6.18. $\forall_m \exists_{n \geq m} a_n > \pi$ **TAK**

6.19. $\exists_n a_n > \pi$ **TAK**

Zadanie 7.

Wyznaczyć **promień** zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n^2} \cdot x^{n^2}}{((2n)!)^n}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{2n^2} \cdot |x|^{n^2}}{((2n)!)^n}} = \frac{n^{2n} \cdot |x|^n}{(2n)!} = b_n.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) , przy założeniu $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{(n+1)^{2n+2} \cdot |x|^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n} \cdot |x|^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}{(2n+2) \cdot (2n+1)} \cdot |x| = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n+1}{2 \cdot (2n+1)} \cdot |x| \rightarrow \frac{e^2}{4} \cdot |x| \end{aligned}$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Jeżeli $\frac{e^2}{4} \cdot |x| < 1$, czyli

$$|x| < \frac{4}{e^2},$$

to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu potęgowego danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{e^2}{4} \cdot |x| > 1$, czyli

$$|x| > \frac{4}{e^2},$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1$, skąd wynika, że szereg potęgowy jest rozbieżny.

Zatem szereg potęgowy ma promień zbieżności $4/e^2$.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $4/e^2$.

Punktacja za częściowe rozwiązania:

1 punkt za zastosowanie kryterium Cauchy'ego do danego szeregu potęgowego i poprawne wyliczenie b_n .

2-gi punkt za rozpoczęcie stosowania kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n) .

kolejne 2 punkty za wyliczenie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^2}{4} \cdot |x|.$$

Jeżeli w rozwiązaniu nie pojawia się liczba e , ocena nie może być wyższa niż **3 punkty**.

Zadanie 8.

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1^4 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 4^4 + \dots + (n-1)^4 \cdot n^4 + n^4 \cdot (n+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ dowodzona nierówność przyjmuje postać $1^4 \cdot 2^4 < \frac{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{9}$, czyli $16 < 24$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest nierówność

$$1^4 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 4^4 + \dots + (n-1)^4 \cdot n^4 + n^4 \cdot (n+1)^4 < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Udowodnimy, że wówczas

$$1^4 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 4^4 + \dots + n^4 \cdot (n+1)^4 + (n+1)^4 \cdot (n+2)^4 < \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3}{9}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} & 1^4 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 4^4 + \dots + n^4 \cdot (n+1)^4 + (n+1)^4 \cdot (n+2)^4 < \\ & < \frac{n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} + (n+1)^4 \cdot (n+2)^4 = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9 \cdot (n+1) \cdot (n+2)) = \\ & = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9 \cdot (n^2 + 3n + 2)) = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 18) < \\ & < \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9} \cdot (n+3)^3 = \\ & = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3}{9}, \end{aligned}$$

co kończy drugi krok indukcyjny.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Punktacja za częściowe rozwiązania:

1 punkt za przystąpienie do dowodu indukcyjnego oraz sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 1$.

2-gi punkt za poprawne sformułowanie nierówności

$$1^4 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 4^4 + \dots + n^4 \cdot (n+1)^4 + (n+1)^4 \cdot (n+2)^4 < \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3}{9}$$

i skorzystanie z założenia indukcyjnego.

3-ci punkt za wyłączenie czynnika

$$\frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{9}.$$

Zadanie 9.

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt[4]{y^2 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 1) - (y^2 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} \right| = \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 1} + \sqrt[4]{0 + 1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{y^2 + 1}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \leq |x - y| \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{|x - y|}{2}. \end{aligned}$$

Punktacja za poszczególne elementy rozwiązania:

Doprowadzenie przekształceń do (1) - **1 punkt**

Doprowadzenie przekształceń do (2) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (3) - **1 punkt**

Otrzymanie nierówności (4) - **1 punkt**

Dokończenie rozwiązania - **1 punkt**

Zadanie 10.

Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2}{n^3} + \frac{4n^2+n}{n^3+1} + \frac{4n^2+2n}{n^3+2} + \frac{4n^2+3n}{n^3+3} + \frac{4n^2+4n}{n^3+4} + \dots + \frac{9n^2-n}{n^3+5n-1} + \frac{9n^2}{n^3+5n} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do $9/4$ przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{4n^2}{n^3} + \frac{4n^2+n}{n^3} + \frac{4n^2+2n}{n^3} + \dots + \frac{9n^2}{n^3} = \frac{4n}{n^2} + \frac{4n+1}{n^2} + \frac{4n+2}{n^2} + \dots + \frac{9n}{n^2} = \\ &= \frac{4n + (4n+1) + (4n+2) + \dots + 9n}{n^2} = c_n \end{aligned}$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$\begin{aligned} b_n &\geq \frac{4n^2}{n^3+5n} + \frac{4n^2+n}{n^3+5n} + \frac{4n^2+2n}{n^3+5n} + \dots + \frac{9n^2}{n^3+5n} = \\ &= \frac{4n}{n^2+5} + \frac{4n+1}{n^2+5} + \frac{4n+2}{n^2+5} + \dots + \frac{9n}{n^2+5} = \frac{4n + (4n+1) + (4n+2) + \dots + 9n}{n^2+5} = a_n. \end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n + (4n+1) + (4n+2) + \dots + 9n = (5n+1) \cdot \frac{4n+9n}{2} = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2},$$

gdzie $5n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2n^2} = \frac{13 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{2} \rightarrow \frac{65}{2}$$

przy $n \rightarrow \infty$ i podobnie

$$a_n = \frac{13n \cdot (5n+1)}{2n^2+10} = \frac{13 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{10}{n^2}\right)} \rightarrow \frac{65}{2}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{65}{2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{65}{2},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{65}{2}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $65/2$.

Punktacja za częściowe rozwiązania:

0 punktów za próbę szacowania sumy przez liczbę składników razy wspólne szacowanie składników, przy braku świadomości, aby najpierw szacować tylko mianowniki.

2 punkty za wykonanie oszacowań przez a_n i c_n (bez wysumowania postępu arytmetycznego).

Zadanie 11.

Skonstruować przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n = 1.$$

Wskazówka: Nie istnieje przykład będący czystym szeregiem geometrycznym.

Rozwiązanie:

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma być szeregiem zbieżnym bezwzględnie, zbieżne są także szeregi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$. Oznaczmy ich sumy odpowiednio przez A i B . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A + B \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n = A - B,$$

a zatem warunki zadania będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 2$ i $B = 1$.

Niech więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich i sumie 2, np. $a_{2n} = 1/2^{n-1}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ niech ma sumę 1, np. $a_{2n-1} = 1/2^n$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2-1}} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \frac{1}{2^{(n+1)/2}} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$

Punktacja:

Rozwiązania wykazujące brak zrozumienia wskazówki, czyli poszukiwanie przykładu szeregu czysto geometrycznego - **0 punktów**.

Za rozbicie szeregu na szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ - **2 punkty**.

Za wyrażenie sumy szukanego szeregu przez sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ - **3-ci punkt**.

Za poprawne podanie opisu wszystkich szeregów spełniających warunki zadania, bez podania konkretnego przykładu - **maksymalnie 4 punkty za całe rozwiązanie**.

Zadanie 12.

Rozwiązać równanie

$$z\bar{z} = z + \bar{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przekształcając dane w treści zadania równanie otrzymujemy kolejno równania równoważne:

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0,$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1,$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1,$$

$$(z-1)\overline{(z-1)} = 1, \quad (3 \text{ punkty})$$

$$|z-1|^2 = 1,$$

$$|z-1| = 1, \quad (\text{razem 4 punkty})$$

skąd wynika, że zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb odległych na płaszczyźnie zespolonej o 1 od liczby 1, czyli okrąg o środku 1 i promieniu 1.

Sposób II

Po podstawieniu $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, dane w zadaniu równanie przyjmuje kolejno postać:

$$(x+yi)(x-yi) = x+yi + x-yi,$$

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad (2 \text{ punkty})$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1,$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad (\text{razem 4 punkty})$$

a zatem zbiorem rozwiązań jest okrąg o promieniu 1 i środku $(x,y) = (1,0)$, czyli $z = 1$.