

15	16	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 10, 7.01.2014, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **15.** (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!! \cdot a^n}{n^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a . Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta otrzymujemy

$$\frac{(2n+3)!! \cdot a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n+1)!! \cdot a^n} = \frac{(2n+3) \cdot a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \rightarrow \frac{2a}{e} \quad \text{przy } n \rightarrow \infty,$$

skąd wynika, że dany w zadaniu szereg jest zbieżny, gdy

$$\frac{2a}{e} < 1, \quad \text{czyli } a < \frac{e}{2}$$

oraz rozbieżny, gdy

$$\frac{2a}{e} > 1, \quad \text{czyli } a > \frac{e}{2}.$$

Zadanie **16.** (5 punktów)

Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > N - 1.$$

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1° Dla $x \geq 0$ zachodzi nierówność $4^x \leq 8^x$, skąd

$$3^x + 4^x + 9^x \leq 3^x + 8^x + 9^x,$$

czyli

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq 1.$$

2° Niech teraz $x < 0$. Wówczas $4^x > 8^x$, skąd

$$3^x + 4^x + 9^x > 3^x + 8^x + 9^x,$$

czyli

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > 1.$$

Ponadto korzystając z nierówności $4^x < 3^x$ dla $x < 0$ otrzymujemy

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} < \frac{3^x + 3^x + 9^x}{3^x + 0 + 9^x} < \frac{3^x + 3^x + 9^x + 9^x}{3^x + 9^x} = 2.$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq 1 < 2 \quad \text{dla} \quad x \geq 0$$

oraz

$$1 < \frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} < 2 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez liczbę $N = 2$.