

17	18	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr **11**, **13.01.2014**, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **17**. (5 punktów)

Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}$.

Rozwiązanie:

Szereg jest zbieżny. Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 0}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} \geq \frac{(3n+1) \cdot (3n+4)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{3n-2}{2n-1} \geq \frac{3n+4}{2n+5},$$

$$(3n-2) \cdot (2n+5) \geq (3n+4) \cdot (2n-1),$$

$$6n^2 + 15n - 4n - 10 \geq 6n^2 - 3n + 8n - 4,$$

$$6n^2 + 11n - 10 \geq 6n^2 + 5n - 4,$$

$$6n \geq 6,$$

$$n \geq 1.$$

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych n .

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zadanie **18.** (4+2=6 punktów)

Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.