

1	2	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 1, 14.10.2013, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 1. (5 punktów)

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!},$$

co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\frac{k}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \frac{1}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!},$$

$$\frac{k}{(n-k)} = \frac{1}{(k+1)},$$

$$k \cdot (k+1) = n-k,$$

$$k \cdot (k+1) + k = n,$$

$$k^2 + 2k = n. \quad (\spadesuit)$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu $(\spadesuit)$. Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para (k, n) , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n = k^2 + 2k$.

Zadanie 2. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona dowodzonej nierówności ma wartość 1, a prawa $12/10 = 6/5$.
Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1 < 6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10} + (n+1)^4 = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 \cdot (2n+1) + 10 \cdot (n+1)^2) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + n^2 + 10n^2 + 20n + 10) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10). \end{aligned}$$

Z kolei prawą stronę nierówności $(\clubsuit)$ możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10} = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 + 4n + 4) \cdot (2n+3) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 8n^2 + 8n + 3n^2 + 12n + 12) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$L < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10) < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12) = P,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .