

4	5	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 3, 28.10.2013, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 4. (5 punktów)

Dowieść, że liczba $\log_{60} 360$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60} 360$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60} 360 = \frac{m}{n}$$

$$60^{m/n} = 360$$

$$60^m = 360^n.$$

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m} \cdot 3^m \cdot 5^m = 2^{3n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ m = 2n \\ m = n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązań w liczbach dodatnich m, n , gdyż wówczas mielibyśmy

$$m = 2n > n = m.$$

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60} 360$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60} 360$ jest niewymierna.

Zadanie 5. (10 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$ (zadanie za **5 punktów**).

Jeśli liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 4C$, możesz otrzymać **7 punktów**.

Jeśli liczby C i D spełniają nierówność $D \leq 2C$, możesz otrzymać **10 punktów**.

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq \frac{6n^{11} - 0 + 2n^{11}}{6n^{11} - 3n^{11} + 0} = \frac{8n^{11}}{3n^{11}} = \frac{8}{3} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \geq \frac{6n^{11} - 3n^{11} + 0}{6n^{11} - 0 + 3n^{11}} = \frac{3n^{11}}{9n^{11}} = \frac{1}{3} = C,$$

co daje zależność $D = 8C$ wystarczającą do rozwiązania za 5 punktów.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6 + 2 \leq -3 + 2 = -1 < 0$ oraz $-3n^5 + 3 \leq -3 + 3 = 0$ zamiast odpowiednio $-3n^6 \leq 0$ oraz $-3n^5 \leq 0$ i wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} &= \frac{6n^{11} + (-3n^6 + 2)}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq \frac{6n^{11} - 0}{6n^{11} - 3n^{11} + 0} = \frac{6n^{11}}{3n^{11}} = 2 = D, \\ \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} &= \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} + (-3n^5 + 3)} \geq \frac{6n^{11} - 3n^{11} + 0}{6n^{11} - 0} = \frac{3n^{11}}{6n^{11}} = \frac{1}{2} = C. \end{aligned}$$

To daje zależność $D = 4C$ wystarczającą do rozwiązania za 7 punktów.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11} - 3n^6 + 2 \leq 6n^{11} - 3n^5 + 2 < 6n^{11} - 3n^5 + 3,$$

skąd

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} < 1 = D.$$

Zatem rozwiązanie za 7 punktów można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C = 1/3$ oraz $D = 1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C = 1/2$ oraz $D = 1$ składają się na rozwiązanie za 10 punktów.