

6	7	Σ

Nazwisko

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

0

Imię

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Indeks

--	--	--	--	--	--	--	--

ANALIZA 1A, KOŁOKWIUM nr 4, 4.11.2013, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie 6. (5 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} > 4^{n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} = 9 \cdot 2 = 18$$

oraz

$$4^{n+1} = 4^2 = 16,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $18 > 16$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(2n+7) \cdot \binom{2n}{n} > 4^{n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(2n+9) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 4^{n+2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (2n+9) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+9)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+9)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (2n+7) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+9)(2n+1)(2n+2)}{(2n+7)(n+1)^2} = (2n+7) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} > \\ &> 4^{n+1} \cdot \frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} \geq 4^{n+1} \cdot 4 = 4^{n+2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+9)(2n+1)}{(2n+7)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(2n+9)(2n+1) \geq 4(2n+7)(n+1),$$

$$\begin{aligned}
(2n+9)(2n+1) &\geq 2(2n+7)(n+1), \\
4n^2 + 18n + 2n + 9 &\geq 2(2n^2 + 7n + 2n + 7), \\
4n^2 + 20n + 9 &\geq 4n^2 + 18n + 14, \\
2n &\geq 5, \\
n &\geq 5/2.
\end{aligned}$$

Wobec tego, że liczba n jest całkowita, powyższa nierówność jest równoważna nierówności $n \geq 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ oraz dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$11 \cdot \binom{4}{2} = 11 \cdot 6 = 66 > 64 = 4^3.$$

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$13 \cdot \binom{6}{3} = 13 \cdot 20 = 260 > 256 = 4^4.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednio sprawdzenie dla $n = 1$ oraz dla $n = 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Maksymalna możliwa ocena za rozwiązanie, w którym nie wykazano świadomości konieczności wykonania sprawdzenia dla $n = 3$, to 2 punkty.

Zadanie 7. (7 punktów)

Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie g oraz C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$g - \frac{C}{n} < \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n < g + \frac{C}{n}.$$

Rozwiązanie:

Nierówności dane w treści zadania można przepisać w postaci

$$\left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n - g \right| < \frac{C}{n}. \quad (\spadesuit)$$

Sposób I

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, przepisujemy lewą stronę nierówności $(\spadesuit)$ w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n - g \right| &= \left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - (n + g) \right| = \frac{\left| \sqrt{n^4 + n^3} - (n + g)^2 \right|}{\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - (n + g)^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - n^4 - 4gn^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} = \\ &= \frac{|(1 - 4g)n^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)}. \end{aligned}$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującym składnikiem wydaje się być $(1 - 4g)n^3$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy g tak, aby ten składnik był równy zero, czyli przyjmujemy $g = 1/4$. Przy tej wartości g (której nie podstawiamy od razu do wzoru, aby uniknąć niepotrzebnych rachunków na ułamkach szacowanych później przez zero) wykonujemy szacowanie od góry:

$$\begin{aligned} \frac{|-6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} &= \frac{6g^2n^2 + 4g^3n + g^4}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} + n + g \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + (n + g)^2 \right)} < \\ < \frac{6g^2n^2 + 4g^3n^2 + g^4n^2}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 0} + n + 0 \right) \cdot \left(\sqrt{n^4 + 0} + (n + 0)^2 \right)} &= \frac{(6g^2 + 4g^3 + g^4) \cdot n^2}{2n \cdot 2n^2} = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n} = \frac{C}{n}, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania z

$$C = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4} = \frac{6 \cdot 16 + 4 \cdot 4 + 1}{1024} = \frac{96 + 16 + 1}{1024} = \frac{113}{1024}.$$

Końcówkę oszacowań można też wykonać w oparciu o zależności $4g = 1$, czyli $4g^3 = g^2$ oraz $g^2 < 1$, czyli $g^4 < g^2$. Otrzymamy wówczas

$$\frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n} < \frac{6g^2 + g^2 + g^2}{4n} = \frac{8g^2}{4n} = \frac{8}{4^2 \cdot 4n} = \frac{1/8}{n},$$

co zakończy rozwiązanie zadania z $C = 1/8$.

Sposób II

Zamiast korzystać dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, można skorzystać ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}.$$

Wówczas lewą stronę nierówności ($\spadesuit$) można przepisać jako

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n - g \right| &= \frac{|n^4 + n^3 - (n + g)^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + (n + g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + (n + g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + (n + g)^3} = \\ &= \frac{|n^4 + n^3 - n^4 - 4gn^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + (n + g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + (n + g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + (n + g)^3} = \\ &= \frac{|(1 - 4g)n^3 - 6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + (n + g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + (n + g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + (n + g)^3}. \end{aligned}$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującym składnikiem wydaje się być $(1 - 4g)n^3$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy g tak, aby ten składnik był równy zeru, czyli przyjmujemy $g = 1/4$. Przy tej wartości g (której nie podstawiamy od razu do wzoru, aby uniknąć niepotrzebnych rachunków na ułamkach szacowanych później przez zero) wykonujemy szacowanie od góry:

$$\begin{aligned} &\frac{|-6g^2n^2 - 4g^3n - g^4|}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + (n + g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + (n + g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + (n + g)^3} = \\ &= \frac{6g^2n^2 + 4g^3n + g^4}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + (n + g) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + (n + g)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + (n + g)^3} < \\ &< \frac{6g^2n^2 + 4g^3n^2 + g^4n^2}{\left(\sqrt[4]{n^4 + 0} \right)^3 + (n + 0) \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + 0} \right)^2 + (n + 0)^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + 0} + (n + 0)^3} = \\ &= \frac{(6g^2 + 4g^3 + g^4) \cdot n^2}{4n^3} = \frac{6g^2 + 4g^3 + g^4}{4n}. \end{aligned}$$

Dalsza część rozwiązania przebiega tak samo jak w sposobie I.

Sposób III (dość karkołomny rachunkowo i nie polecany, ale chodzi o pokazanie, że tak też można)

Stosujemy wzory skróconego mnożenia do środkowej strony nierówności danej w treści zadania:

$$\sqrt[4]{n^4 + n^3} - n = \frac{n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4 + n^3} \right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4 + n^3} + n^3}.$$

Zwracamy uwagę, że dla dużych n składniki n^3 występujące pod pierwiastkami w mianowniku ostatniego wyrażenia mają niewielki wpływ na jego wartość i zgadujemy, że $g = 1/4$.

Wobec tego

$$\begin{aligned}
\left| \sqrt[4]{n^4+n^3} - n - g \right| &= \left| \frac{n^3}{\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3} - \frac{1}{4} \right| = \\
&= \left| \frac{4n^3 - \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)} \right| = \\
&= \frac{\left| 3n^3 - \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 - n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 - n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} \right|}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)}.
\end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości

$$3a^3 - b^3 - ab^2 - a^2b = (a-b) \cdot (3a^2 + 2ab + b^2)$$

oraz z przytoczonego w sposobie I wzoru na różnicę czwartych potęg kontynuujemy przekształcanie, a następnie szacujemy od góry:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left| 3n^3 - \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 - n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 - n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} \right|}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)} = \\
&= \frac{\left| n - \sqrt[4]{n^4+n^3} \right| \cdot \left(3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)} = \\
&= \frac{n^3 \cdot \left(3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + \sqrt{n^4+n^3} \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+n^3}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+n^3} + n^3\right)^2} < \\
&< \frac{n^3 \cdot \left(3n^2 + 2n \cdot \sqrt[4]{n^4+15n^4} + \sqrt{n^4+3n^4} \right)}{4 \cdot \left(\left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^3 + n \cdot \left(\sqrt[4]{n^4+0}\right)^2 + n^2 \cdot \sqrt[4]{n^4+0} + n^3\right)^2} = \\
&= \frac{n^3 \cdot (3n^2 + 2n \cdot 2n + 2n^2)}{4 \cdot (4n^3)^2} = \frac{9n^5}{64n^6} = \frac{9/64}{n},
\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania z $C = 9/64$.

Wykorzystanie oszacowania $\sqrt[4]{n^4+n^3} < \sqrt[4]{n^4+4n^3} = n \cdot \sqrt[4]{5} < n \cdot \sqrt[4]{81/16} = n \cdot 3/2$ pozwoliłoby uzyskać $C = 1/8$.

Uwagi:

Liczba g jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $g \neq 1/4$ jest błędne.

Nietrudno prześledzić powyższe rozwiązanie i stwierdzić, że w istocie zachodzą nierówności

$$\frac{1}{4} - \frac{C}{n} < \sqrt[4]{n^4+n^3} - n < \frac{1}{4},$$

czyli składnik C/n po prawej stronie danych w treści zadania nierówności można pominąć, dowodząc tym samym nierówności mocniejszej.